応力とひずみ

やり直し塑性力学 in 名古屋

名古屋大学　工学研究科
湯 川 伸 樹
yukawa@numse.nagoya-u.ac.jp

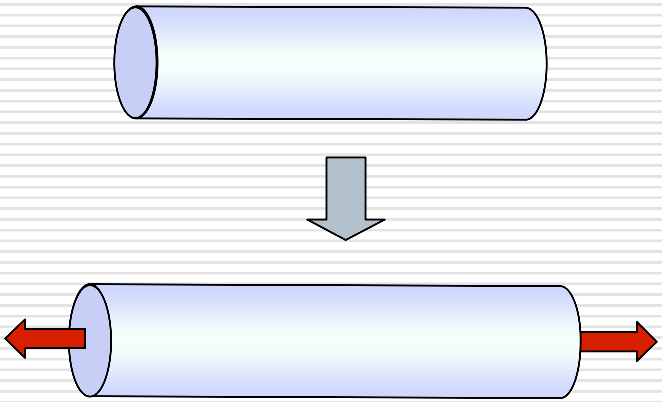
塑性力学の基礎（応力とひずみ）

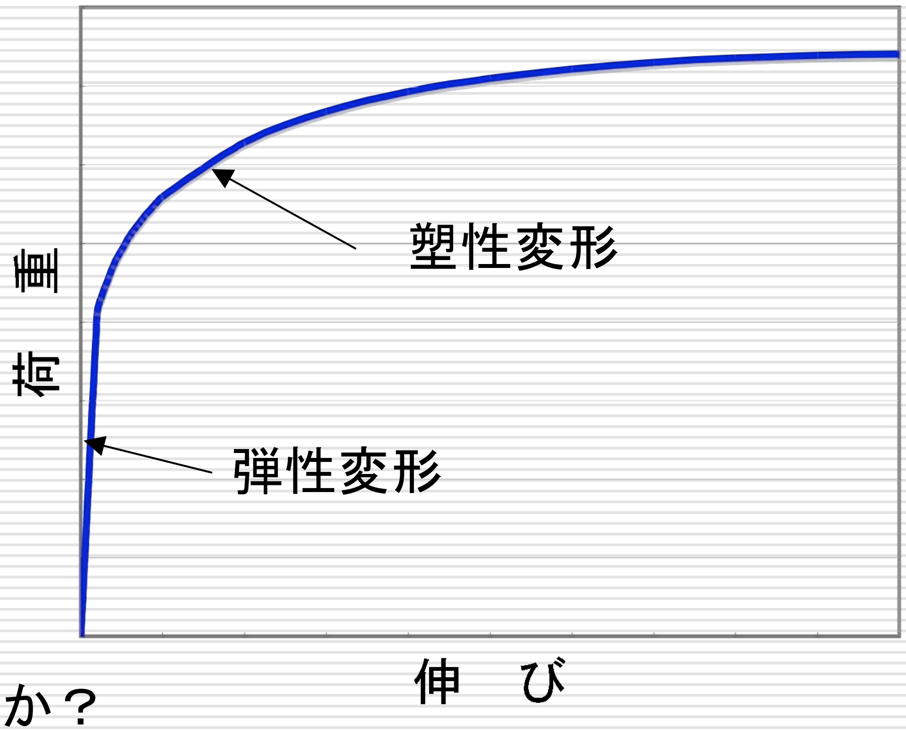
- 塑性力学の枠組み
- 応力の定義
- 力の釣合い
- ひずみの定義

塑性力学の枠組み

- そもそも材料が変形するとは？

例えば棒に一軸の力をかけると



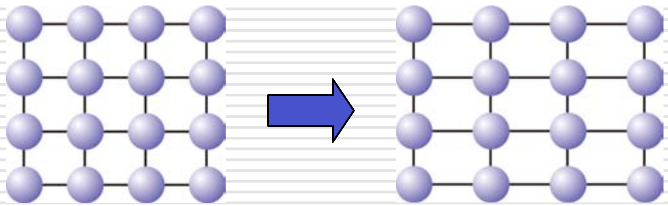


材料の中では何が起きているのか？

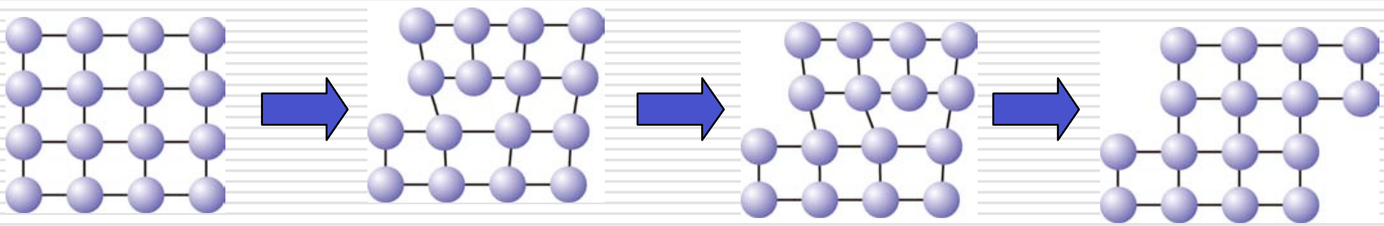
塑性力学の枠組み

おおざっぱに言えば、

弾性変形　原子と原子の間隔が変化する。



塑性変形　原子と原子の並びがずれる。



いずれにせよ、原子レベルの非常にミクロな現象

塑性力学の枠組み

- 材料の変形を考える上で、１つ１つの原子の状態を追いかければよいか？
  - そもそも全ての原子の状態を完全に把握することは不可能

    純鉄だと　1㎤あたり、おおよそ4×10^{22}個
    結晶、転位、欠陥、固溶原子、介在物、、、、

  - 工学的には、そこまでミクロな情報を必要としない場合が多い

塑性力学の枠組み

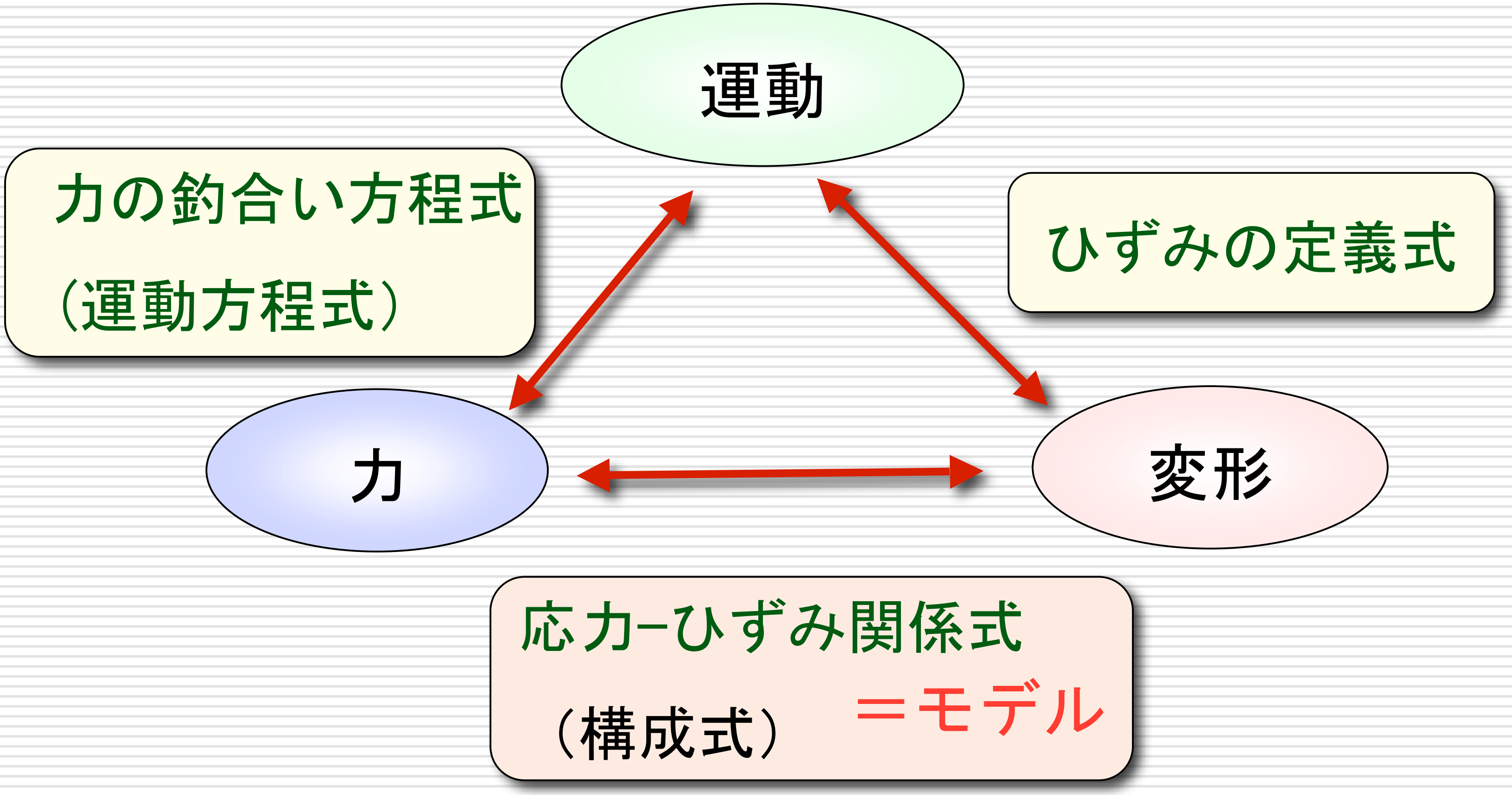
- 材料をマクロ的な観点でモデル化し、数式表現する（構成式）
- その特性は材料をどんなに細かく分割しても、変わらないと仮定

↓

連続体（Continuum）

塑性力学の枠組み

連続体の状態を支配する方程式



塑性力学の基礎(応力とひずみ)

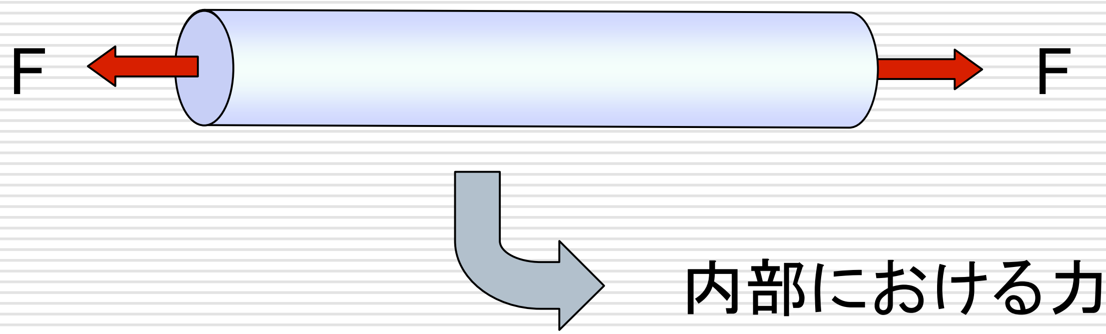
- 塑性力学の枠組み
- 応力の定義
- 力の釣り合い
- ひずみの定義

応力の定義

連続体に作用する力の状態を表すには

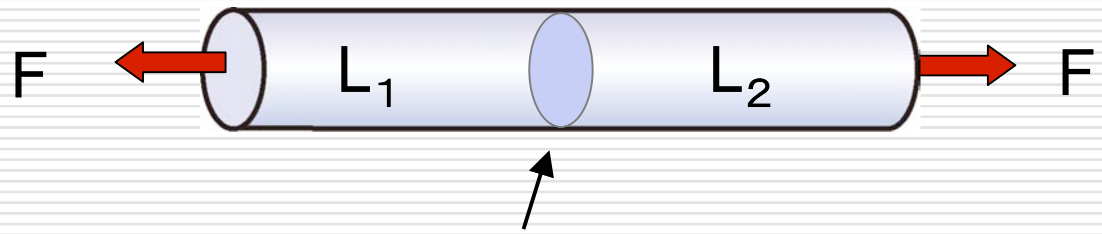
どうすればよいか

まず棒材に一軸の荷重がかかって静止
している場合を考えてみる



内部における力の状態は？

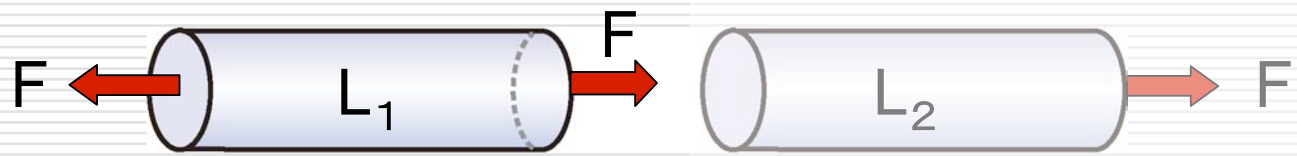
応力の定義



仮想的にこの面で左右に分割する

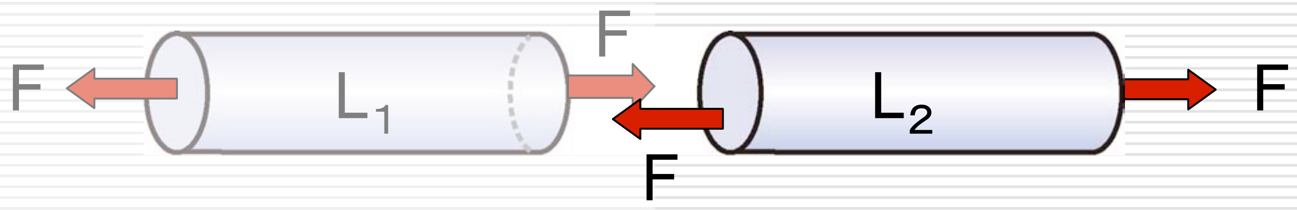
⇩

物体L_1とL_2は，この面を介して互いに力を及ぼし合っている。



物体が釣り合っている場合，それを分割した個々の部分でも，釣り合っている

応力の定義

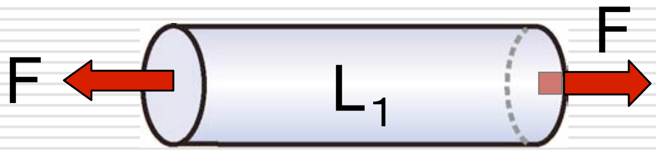


（仮想的な）分割面を介して，物体L_2からL_1にかかる力と大きさが同じで向きが逆の力が，L_1からL_2にかかる。

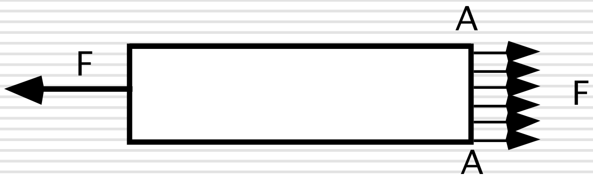
作用・反作用の法則

応力の定義

左側だけ表示



この場合分割面には，面に垂直な方向の均一な力がかかる

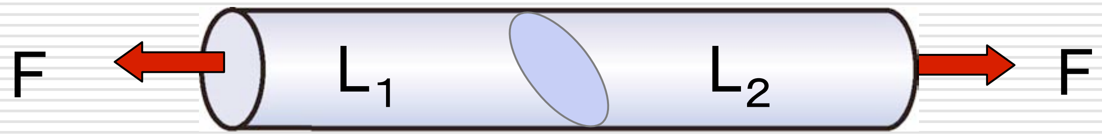


断面積S

単位面積あたりの力は $\sigma = \dfrac{F}{S}$

応力の定義

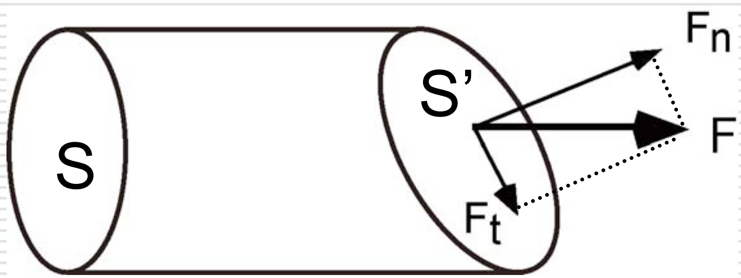
斜めの面で分割したら？



$$F_n = F \cdot \cos\theta$$

$$F_t = F \cdot sin\theta$$

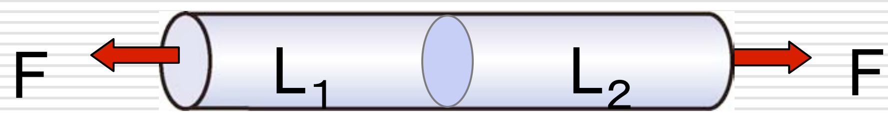
$$S' = \frac{S}{\cos\theta}$$



$$\sigma = \frac{F_n}{S'} = \frac{F}{S} \cdot \cos^2\theta$$

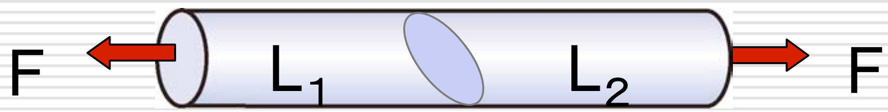
$$\tau = \frac{F_t}{S'} = \frac{F}{S} \cdot sin\theta \cdot \cos\theta$$

応力の定義



$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$\tau = 0$$

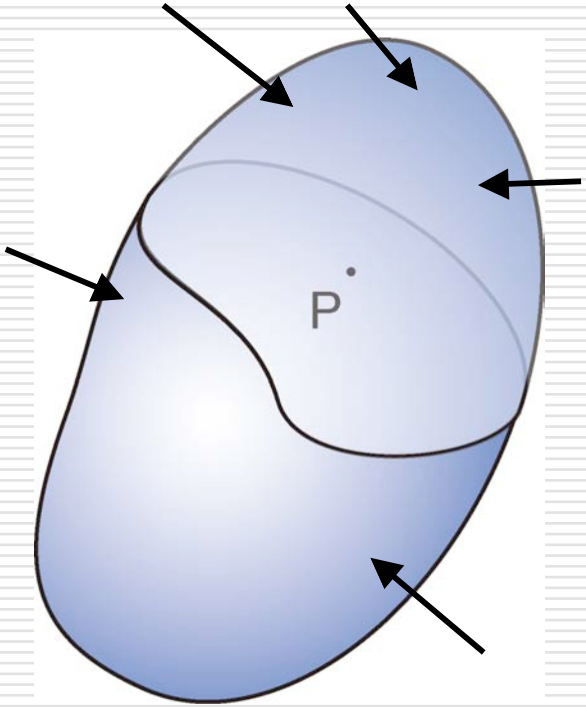


$$\sigma = \frac{F_n}{S'} = \frac{F}{S} \cdot \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{F_t}{S'} = \frac{F}{S} \cdot sin\theta \cdot \cos\theta$$

同じ力の状態でも，考えている面が変わると
「応力」の現れ方は変わる。

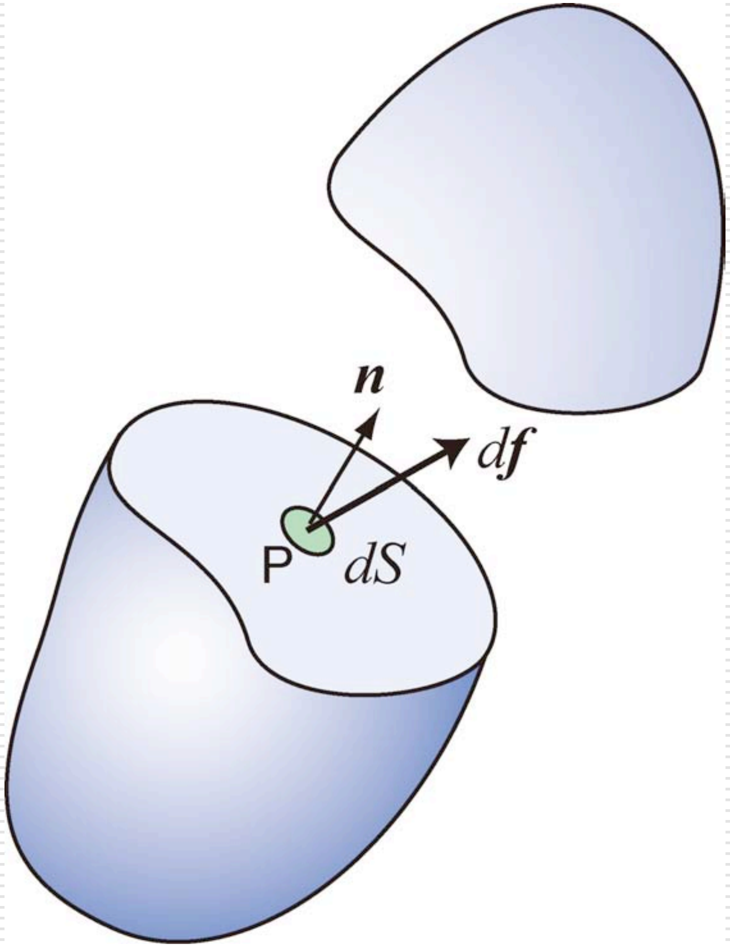
応力の定義



一般的な変形の場合，
材料にかかる内力は分布を持つ。

例えば点Pにおける力の
状態を表すには？

応力の定義



点Pを通る仮想分割面に
微小面積 dS を考え，
そこに作用する力 df を考える。

$$\boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{n})} = \lim_{dS \to 0} \frac{df}{dS}$$

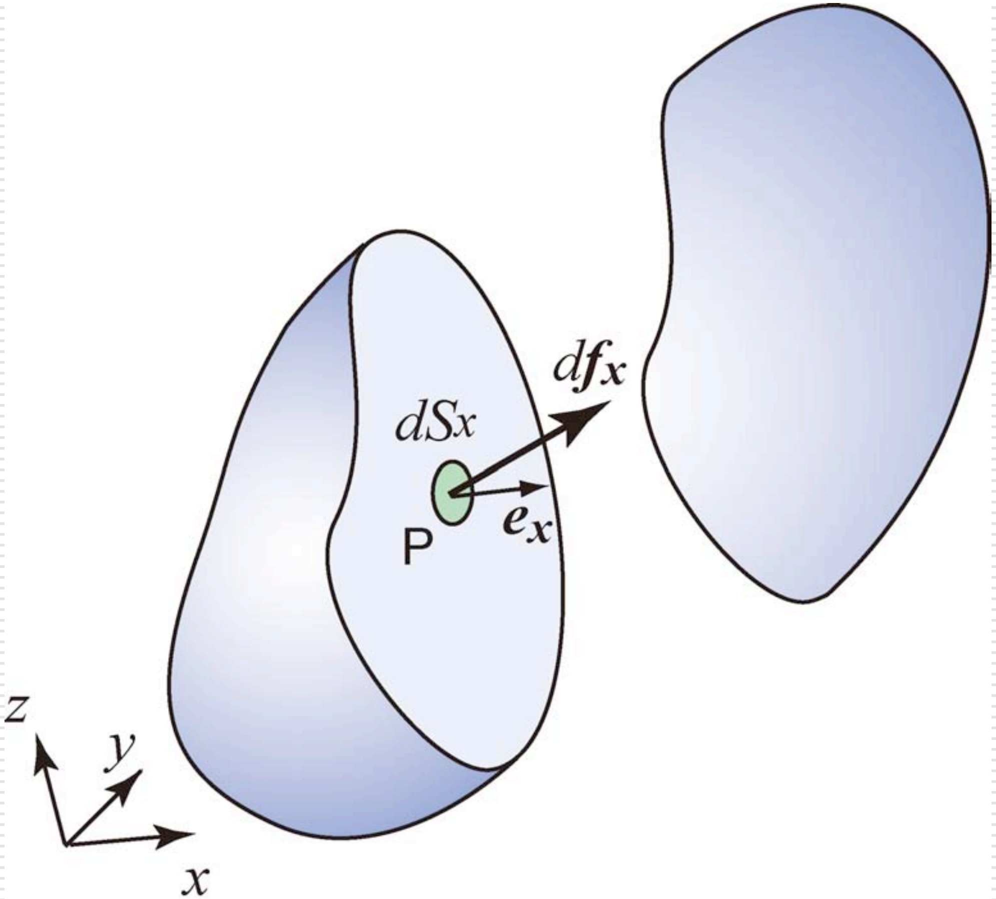
で，表せそう・・・

しかし，点Pを通る面は無数にある。

⬇

座標軸に垂直な面で考えてみる。

応力の定義



例えばx軸に垂直な面に対して,

$$\boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{e_x})} = \lim_{dS_x \to 0} \frac{d\boldsymbol{f}_x}{dS_x}$$

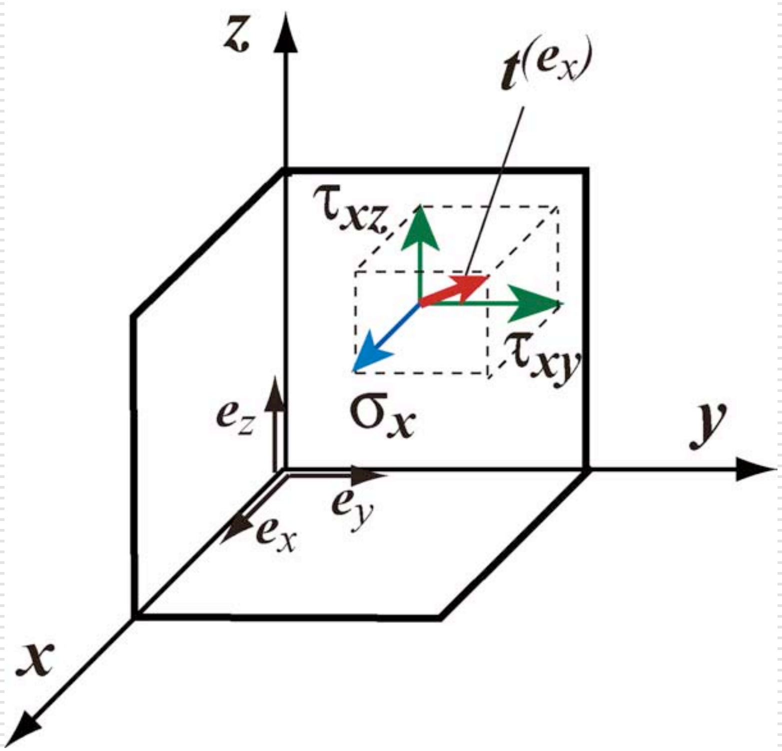
$\boldsymbol{e_x}$: x軸方向の単位ベクトル

他の軸に対する面についても同様

$$\boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{e}_y)} = \lim_{dS_y \to 0} \frac{d\boldsymbol{f}_y}{dS_y}$$

$$\boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{e}_z)} = \lim_{dS_z \to 0} \frac{d\boldsymbol{f}_z}{dS_z}$$

応力の定義



・面に垂直方向の成分 σ_x

・面に平行方向は更に
　軸方向に分解して τ_{xy}, τ_{xz}

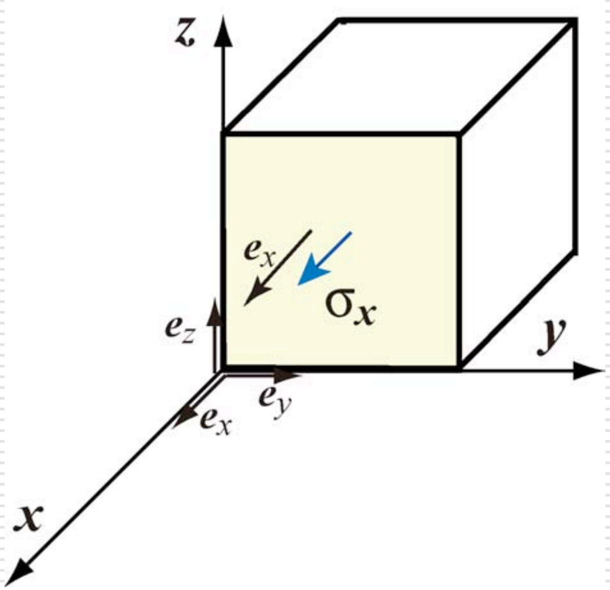
他の軸に垂直な面に対しても
同様に

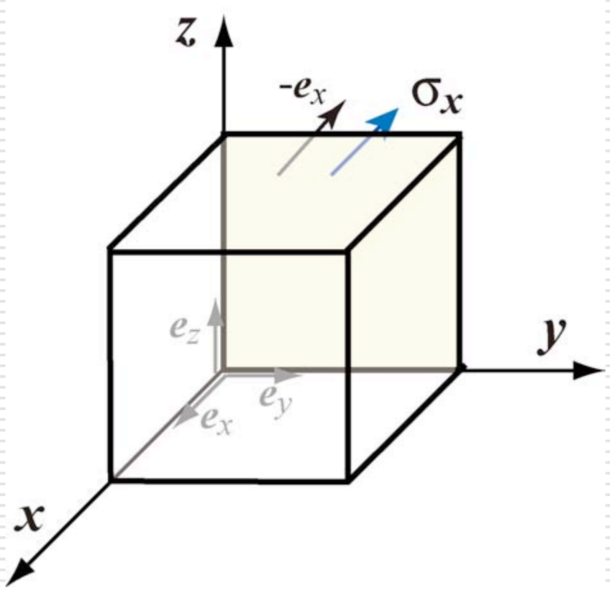
y軸に垂直な面 σ_y, τ_{yx}, τ_{yz}

z軸に垂直な面 σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}

9つの応力成分

応力の定義





外向き法線ベクトルが
軸の正方向

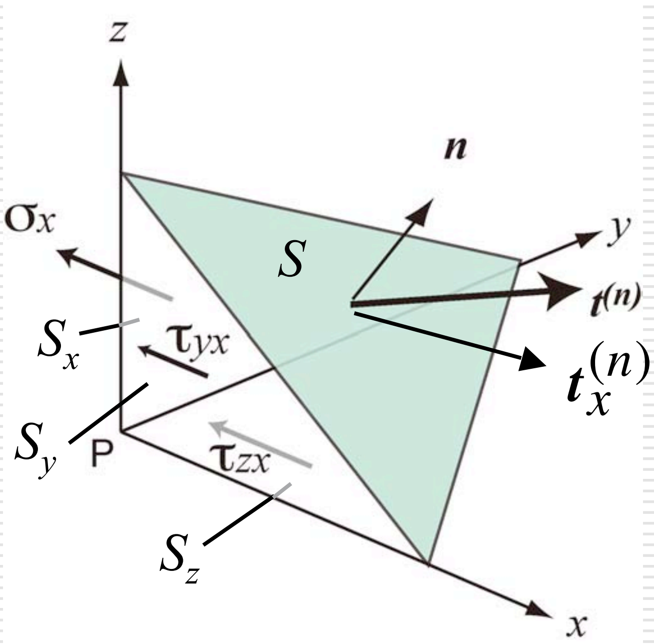
正の面
正の方向を向く応力が正

外向き法線ベクトルが
軸の負方向

負の面
負の方向を向く応力が正

応力の定義

$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_x)}, \mathbf{t}^{(\mathbf{e}_y)}, \mathbf{t}^{(\mathbf{e}_z)}$ と $\boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{n})}$ の関係は？



P点を通り，軸に垂直な面とnの法線ベクトルを持つ面とで囲まれた三角錐を考える。

*S*面に作用するx方向の力

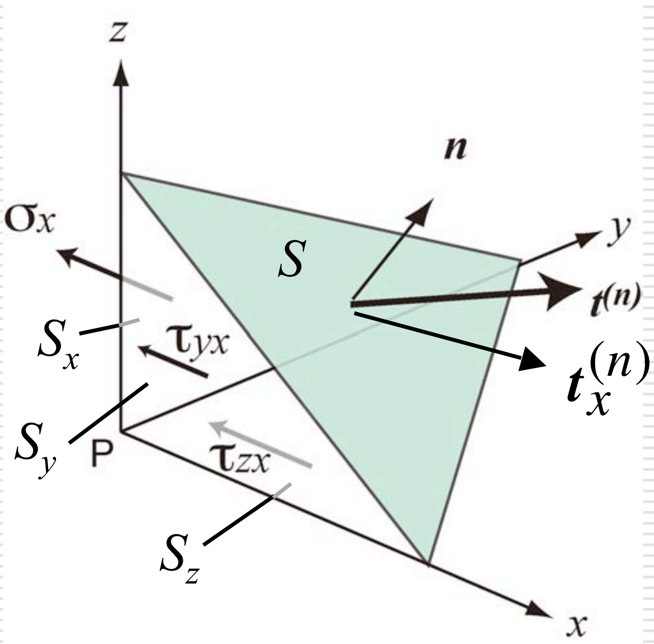
$$f_x = t_x^{(\boldsymbol{n})} \cdot S$$

*Sx,Sy,Sz*面にかかる-x方向の力

$$f'_x = \sigma_x \cdot S_x + \tau_{yx} \cdot S_y + \tau_{zx} \cdot S_z$$

これが釣り合う。

応力の定義



$\boldsymbol{n} = \left(n_x,\ n_y,\ n_z\right)$ (ただし $|\boldsymbol{n}| = 1$) として

$$t_x^{(\boldsymbol{n})} \cdot S = \sigma_x \cdot S_x + \tau_{yx} \cdot S_y + \tau_{zx} \cdot S_z$$
$$= \sigma_x \cdot S \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot S \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot S \cdot n_z$$

すなわち

$$t_x^{(\boldsymbol{n})} = \sigma_x \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot n_z$$

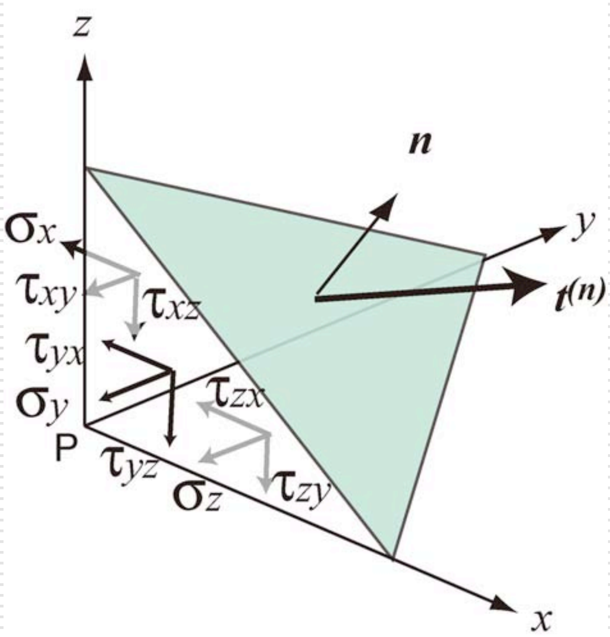
他の方向も同様に

$$t_y^{(\boldsymbol{n})} = \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{zy} \cdot n_z$$

$$t_z^{(\boldsymbol{n})} = \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z$$

応力の定義

まとめると



方向x, y, zを
1,2,3で表わし

τ も含め σ という
記号で表すと、

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(\mathbf{n})} \\ t_y^{(\mathbf{n})} \\ t_z^{(\mathbf{n})} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}^T \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}^T \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \sigma^T \cdot \mathbf{n}$$

Cauchy応力テンソル

σ が分かれば，点Pを通る
任意の面における$t^{(n)}$が求まる。

応力の定義

$$\begin{Bmatrix} t_1^{(\mathbf{n})} \\ t_2^{(\mathbf{n})} \\ t_3^{(\mathbf{n})} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}^T \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

方向1，2，3 を i, j で表すと

$$t_j^{(\mathbf{n})} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij} \cdot n_i \qquad (j=1\frown 3)$$

$\sum$ 記号も省略して $t_j^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} \cdot n_i$ $(j=1\frown 3)$

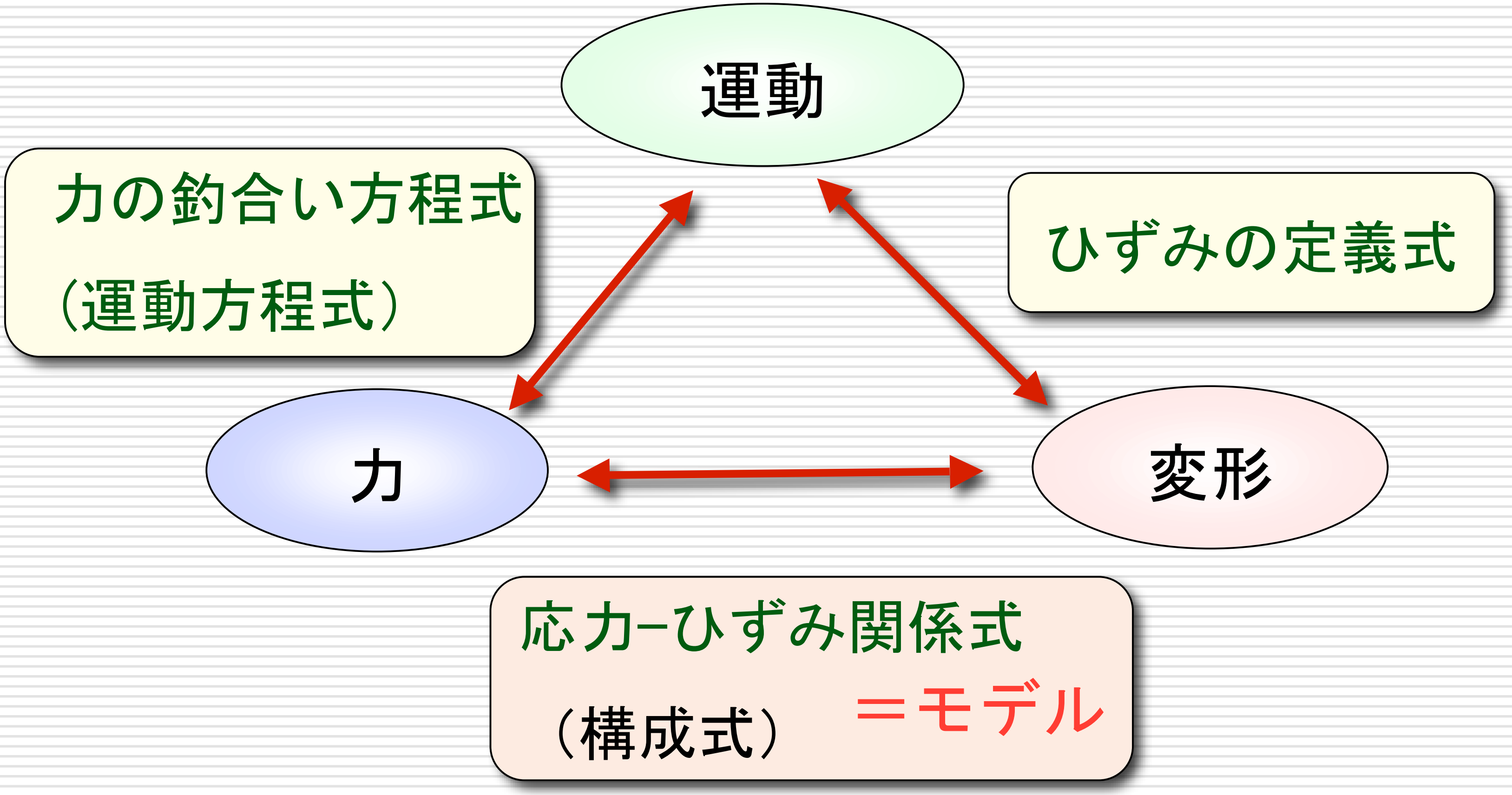
一つの項の中に同じ添字が2回出て来たときは
Σ記号があるものと見なす ⇒ 総和則

塑性力学の基礎(応力とひずみ)

- 塑性力学の枠組み
- 応力の定義
- 力の釣合い
- ひずみの定義

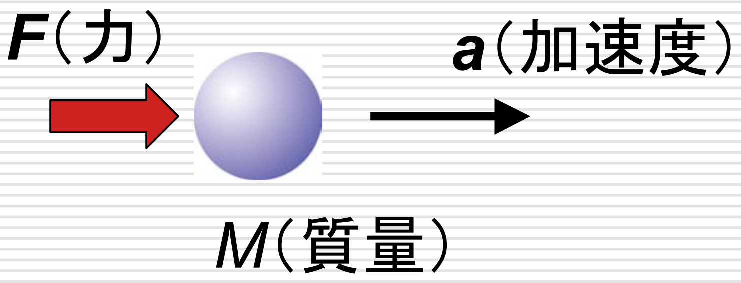
力の釣合い

連続体の状態を支配する方程式

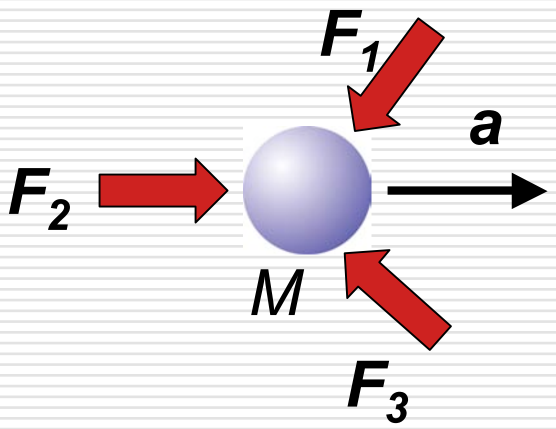


力の釣合い

- ニュートンの運動方程式



$$\boldsymbol{M \cdot a = F}$$



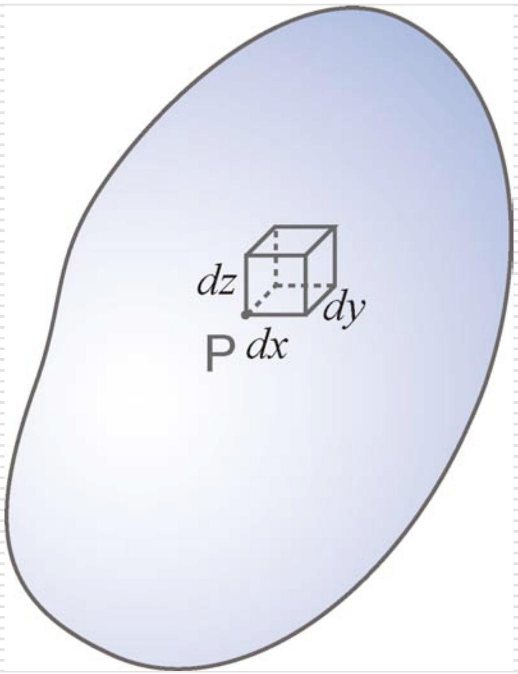
$$M \cdot \boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_i$$

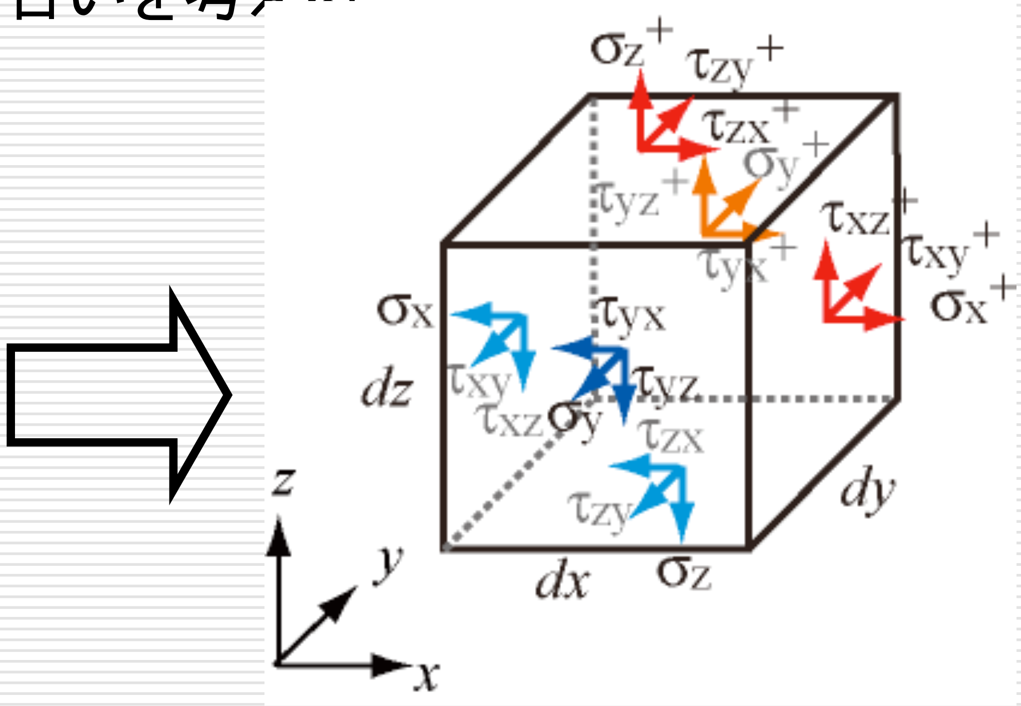
静止しているなら $\boldsymbol{a} = 0$

すなわち $\boxed{\sum \boldsymbol{F}_i = 0}$

力の釣合い

- 大きさdx dy dzの微小六面体を考え，
  これに作用する力の釣合いを考える

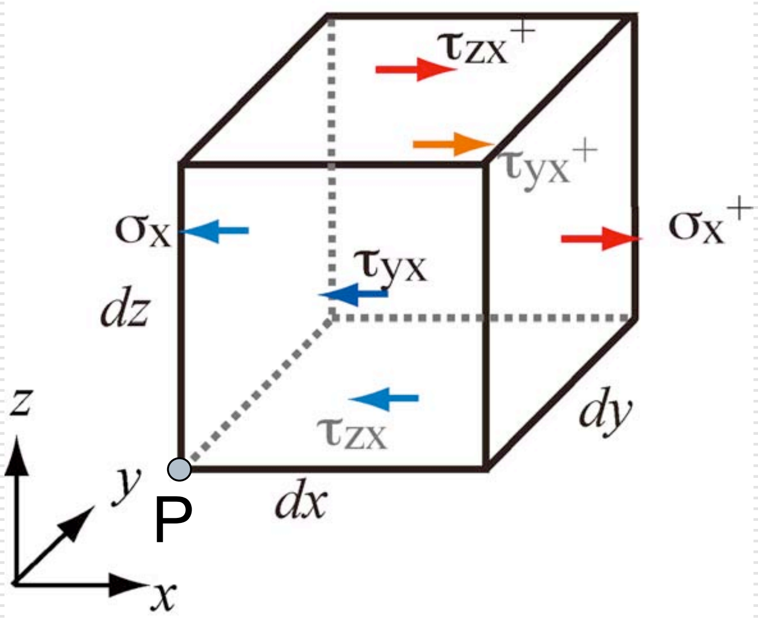




とりあえず、体積力（重力等）は無視して考える

力の釣合い

□ X方向の力の釣合い



σ_x^+ がかかっている面は，点Pより dx離れているので，応力の変化を考慮して

$$\sigma_x^+ = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \cdots$$

τ_{yx}^+, τ_{zx}^+ も同様

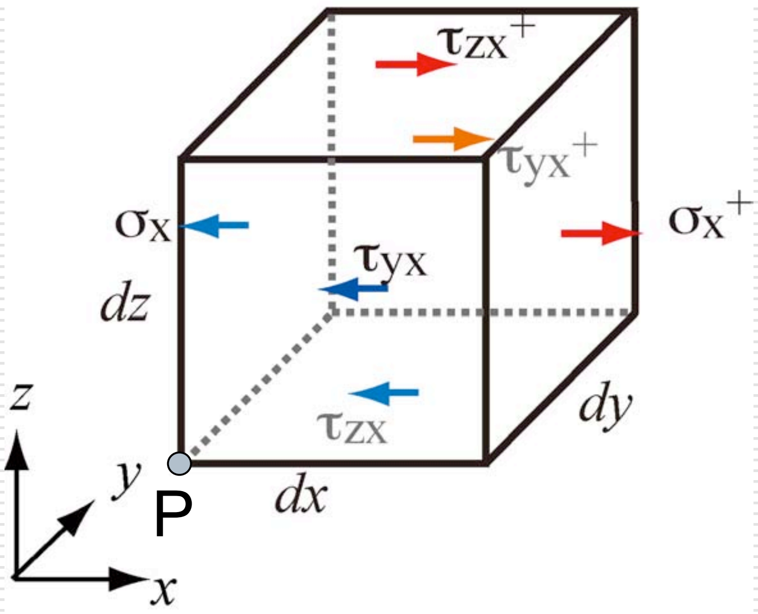
$$\tau_{yx}^+ = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + \cdots$$

$$\tau_{zx}^+ = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz + \cdots$$

力の釣合い

- X方向の力の釣合い

各応力に面積をかけて，力の釣り合式を作る。



$$-\sigma_x \cdot dy \cdot dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz$$
$$-\tau_{yx} \cdot dx \cdot dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx \cdot dz$$
$$-\tau_{zx} \cdot dx \cdot dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx \cdot dy = 0$$

力の釣合い

- X方向の力の釣合い

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \cdot dx \cdot dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \cdot dx \cdot dy = 0$$

両辺をdx・dy・dzで割って

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

同様にｙ方向の釣合い

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

Ｚ方向の釣合い

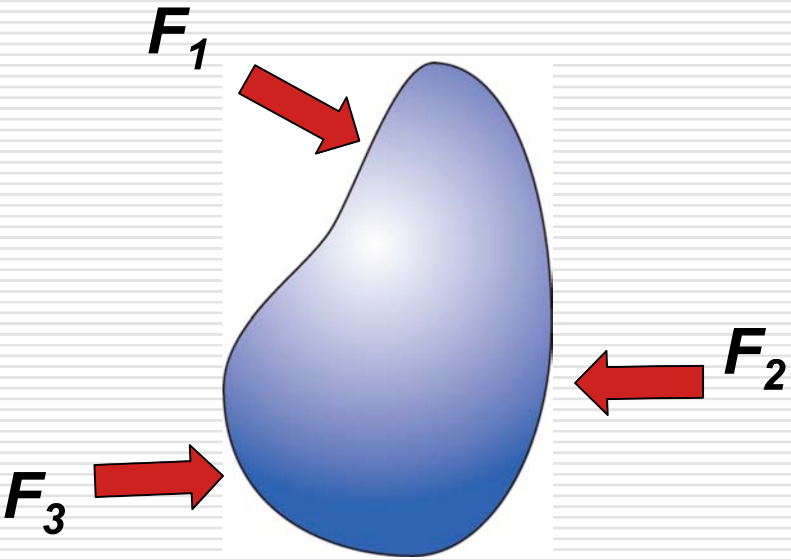
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

まとめて書くと

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (j = 1 \cdots 3)$$

力の釣合い

回転に関して $\boldsymbol{L} = \sum m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{r}_i$ 角運動量



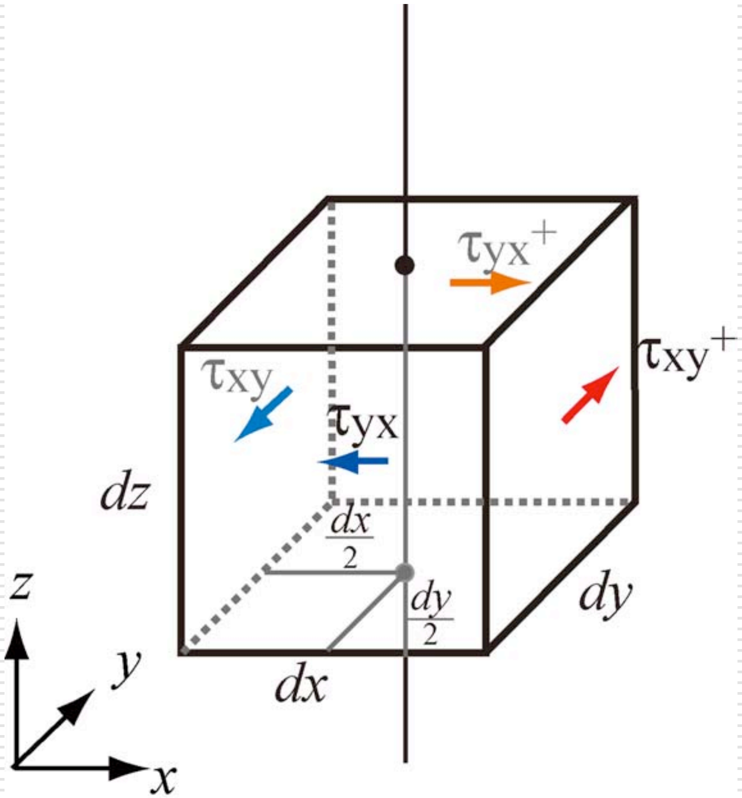
$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= \sum m_i (\ddot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{r}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) \\
&= \sum (m_i \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{r}_i) \\
&= \sum (\boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{r}_i) \\
&= \boldsymbol{N}
\end{aligned}
$$

N:力のモーメント

静止しているなら $\boxed{\boldsymbol{N} = 0}$

力の釣合い

□ モーメントの釣合い



z面中心を通る軸周りのモーメントの釣合いを考える。

$$\tau_{xy}\cdot dy\cdot dz\cdot\frac{dx}{2}+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)dy\cdot dz\cdot\frac{dx}{2}$$

$$-\tau_{yx}\cdot dx\cdot dz\cdot\frac{dy}{2}-\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx\cdot dz\cdot\frac{dy}{2}=0$$

力の釣合い

- モーメントの釣合い

$$\tau_{xy}\cdot dy\cdot dz\cdot dx+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dy\cdot dz\cdot\frac{dx^2}{2}$$
$$-\tau_{yx}\cdot dx\cdot dz\cdot dy-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\cdot dz\cdot\frac{dy^2}{2}=0$$

両辺をdx・dy・dzで割ると $\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}-\tau_{yx}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}=0$

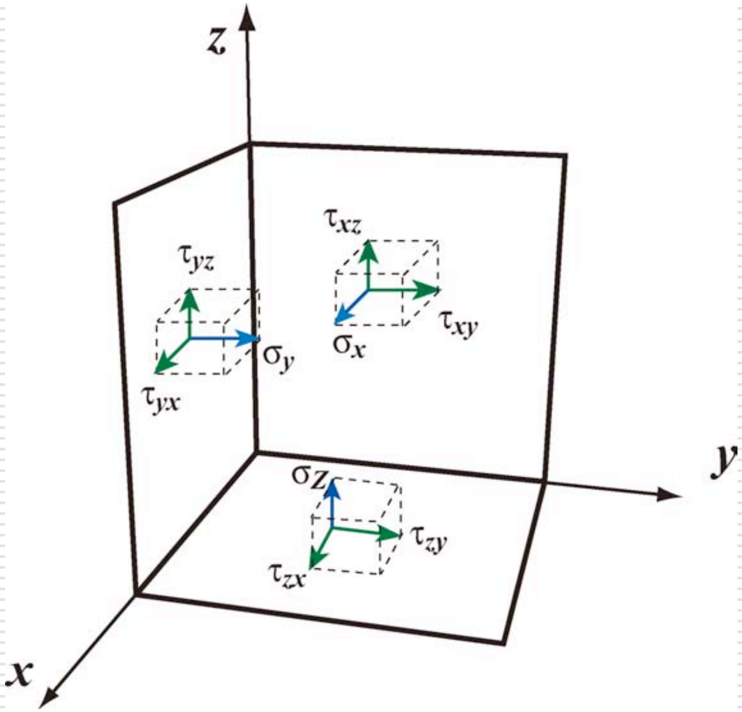
dx→0, dy→0とすると $\tau_{xy}=\tau_{yx}$

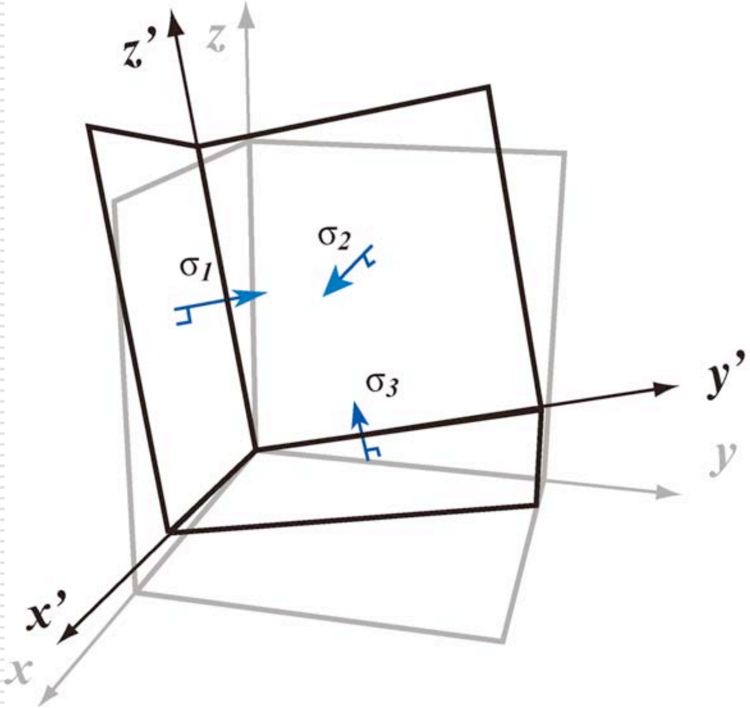
同様に $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ $\tau_{zx}=\tau_{xz}$

Cauchy応力テンソルは対称テンソルであり，

応力の独立成分は $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx}$ の６成分

力の釣合い





$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

主応力，　主方向

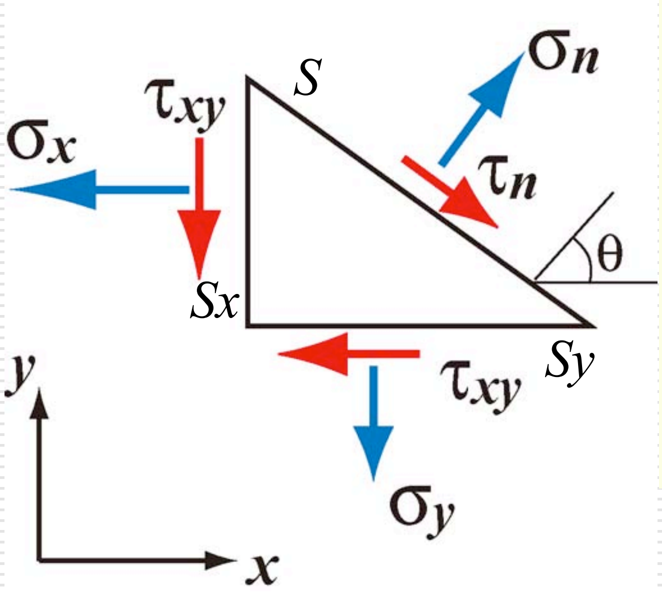
座標軸を回転させていくと，対角成分のみとなる座標軸が存在する。

力の釣合い

２次元で考えてみる。　σ$_n$方向の力の釣合いは

$$\sigma_n \cdot S = \left(\sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} sin\theta\right)\cdot S_x + \left(\sigma_y sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta\right)\cdot S_y$$

$$= \sigma_x \cos^2\theta \cdot S + \tau_{xy} sin\theta\cos\theta \cdot S + \sigma_y sin^2\theta \cdot S$$



$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y sin^2\theta + 2\tau_{xy} sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\left(\cos^2\theta + sin^2\theta\right)$$

$$+ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\left(\cos^2\theta - sin^2\theta\right) + 2\tau_{xy} sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sin 2\theta$$

倍角公式

$$2 sin\theta\cos\theta = sin 2\theta$$

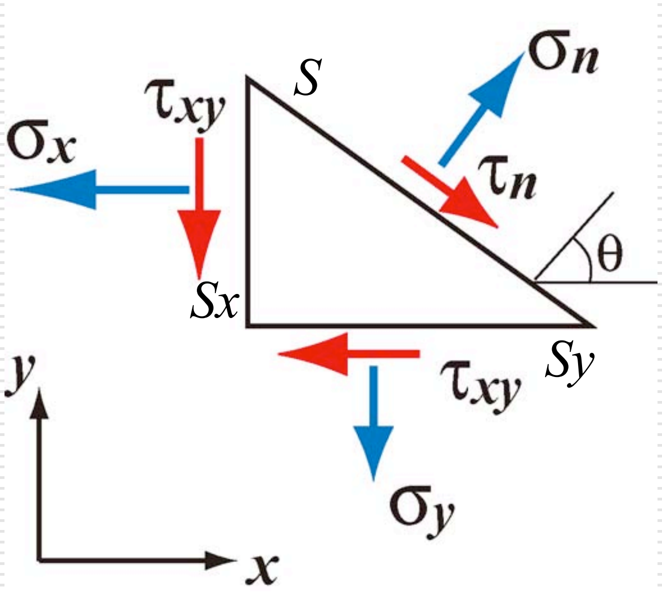
$$\cos^2\theta - sin^2\theta = \cos 2\theta$$

力の釣合い

同様に　τ_n方向の力の釣合いは

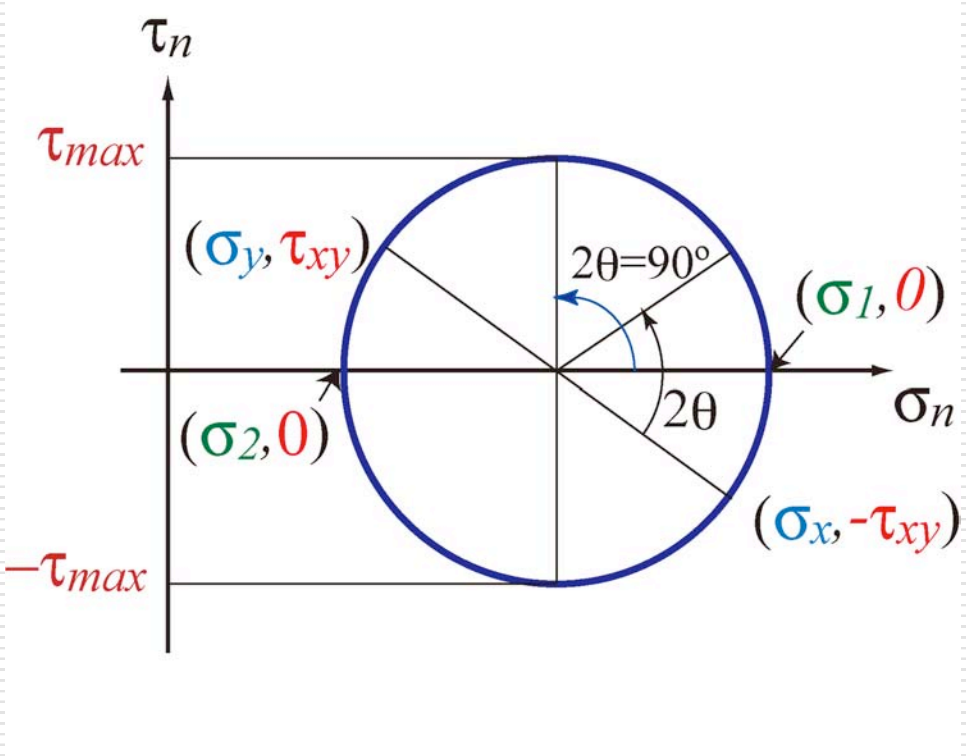
$$\tau_n = \sigma_x sin\theta \cos\theta - \sigma_y sin\theta \cos\theta - \tau_{xy}\left(\cos^2\theta - sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta$$



力の釣合い

縦軸を、横軸をσ_nでグラフにすると、



$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sin 2\theta$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta$$

モールの応力円

・横軸と交わる点が主応力（τ_n＝０となる）

・その面から45°傾いた面でせん断応力最大（τ_{max}）

力の釣合い

3次元だと？

主応力 σ_1, σ_2, σ_3 は $\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$ の3つの固有値

⇩

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$ の解

力の釣合い

$$\sigma^3 - \sigma^2\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$
$$- \sigma\left\{-\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right\}$$
$$- \left(\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}\right) = 0$$

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0$$

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$J_2 = -\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$
$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}$$

$J_1,\ J_2,\ J_3$ は座標軸の取り方に依存しない。 応力の不変量

力の釣合い

座標軸が主軸と一致すると、せん断応力が0となるので

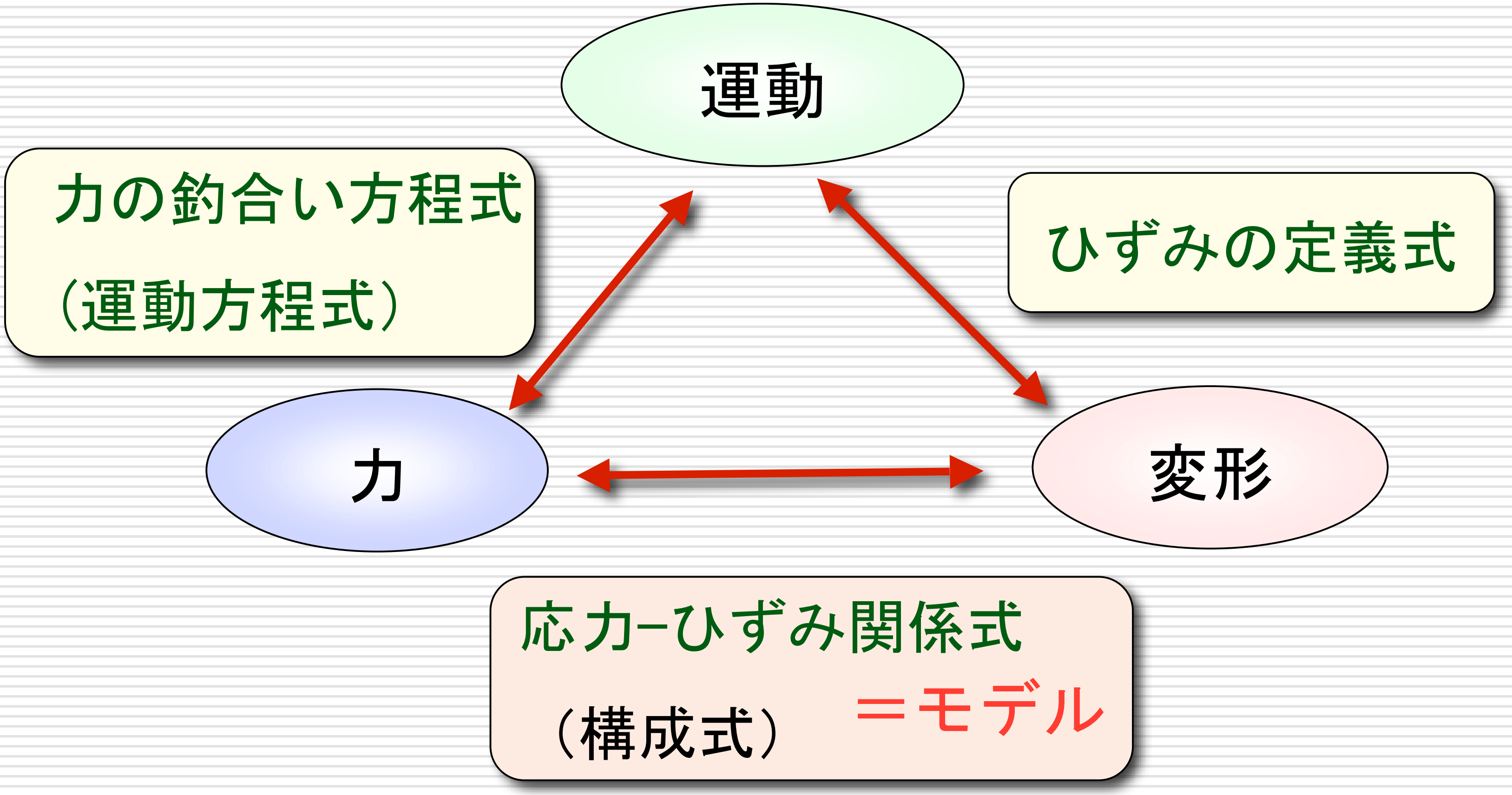
$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$
$$J_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$
$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

塑性力学の基礎(応力とひずみ)

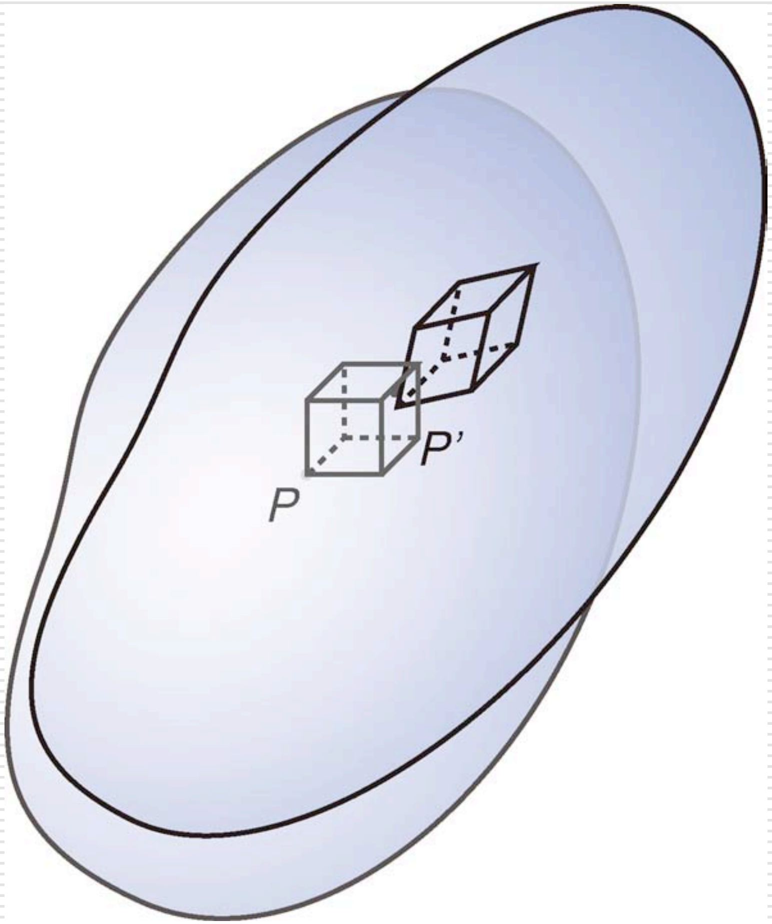
- 塑性力学の枠組み
- 応力の定義
- 力の釣合い
- ひずみの定義

塑性力学の枠組み

連続体の状態を支配する方程式



ひずみの定義

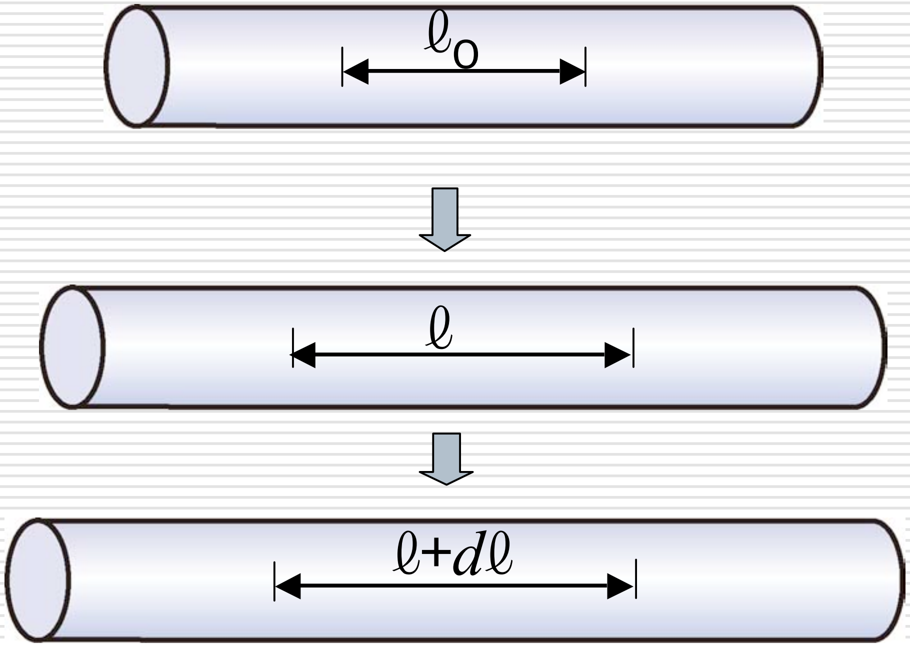


変形とは
・材料の伸び，縮み
・材料のゆがみ

場所によって変位が異なることによって生じる。

ひずみの定義

まず一軸変形を考える



ℓ から $\ell+d\ell$ の時の
ひずみの増分

$$d\varepsilon_0 = \frac{d\ell}{\ell_0}$$ 公称ひずみ増分

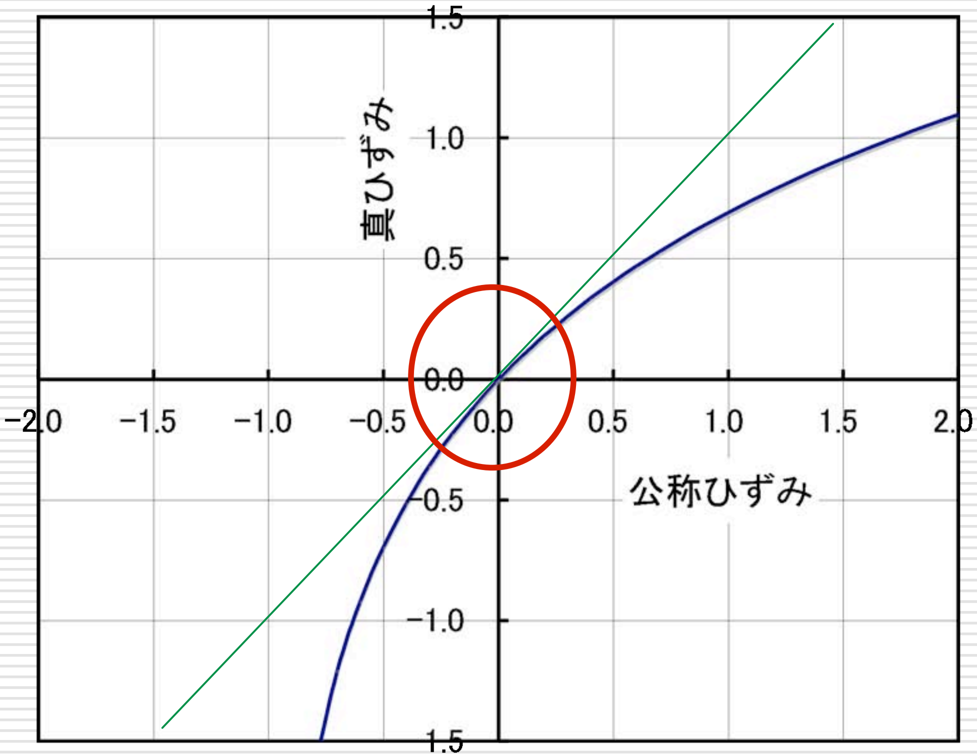
$$d\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell}$$ 真ひずみ増分

それぞれ積分すると

$$\varepsilon_0 = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

$$\varepsilon = \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{d\ell}{\ell} = \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)$$

ひずみの定義



公称ひずみ $\varepsilon_0 = \dfrac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$

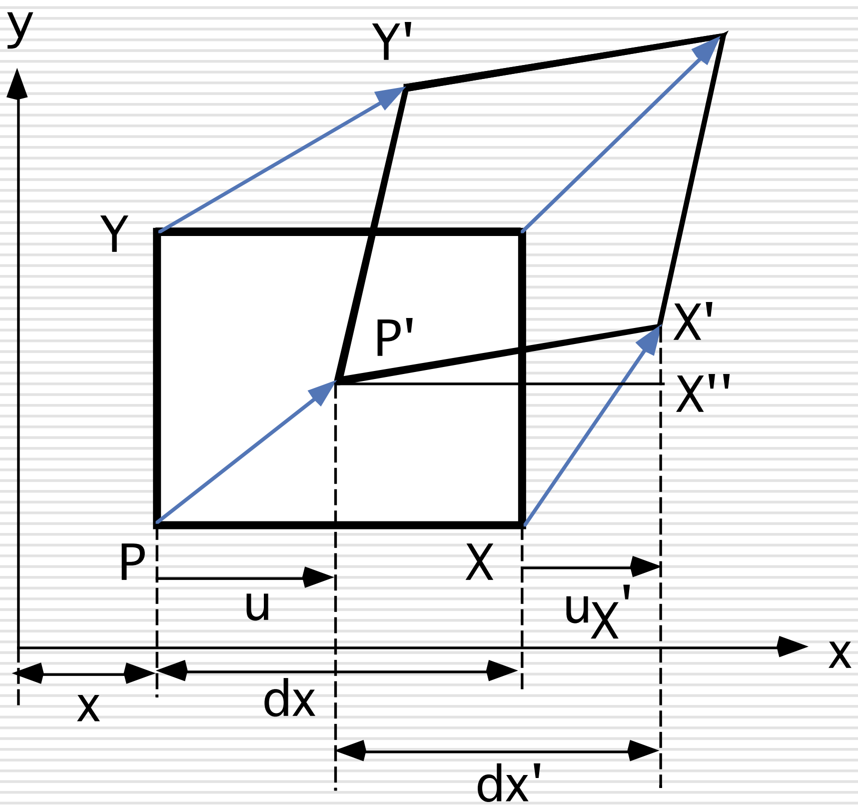
真ひずみ $\varepsilon = \ln\left(\dfrac{\ell}{\ell_0}\right)$

ひずみが微小な時は、

$$\varepsilon_0 \approx \varepsilon$$

ひずみの定義

□ ひずみ一変位関係



次に2次元で考える。

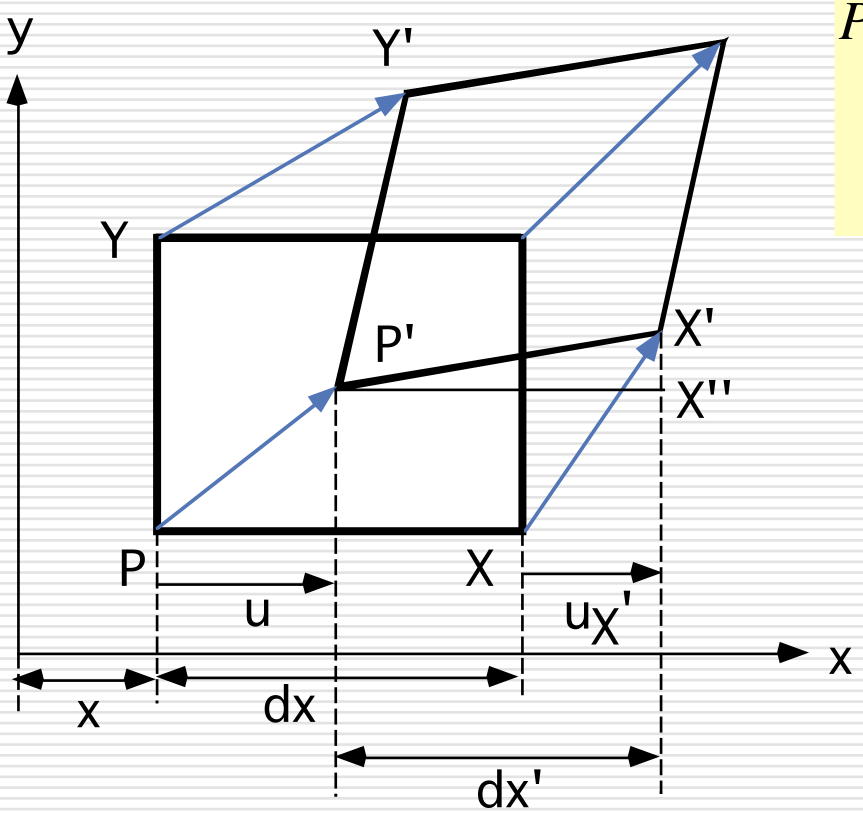
幅dx,高さdyの微小四角形を考え，変形により点PがP'に，点XがX'に変位したとする。

このときの各点のx座標は

$$P: x$$
$$X: x+dx$$
$$P': x+u$$
$$X'': x+dx+u'_x$$
$$= x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

ひずみの定義

- ひずみ－変位関係



$$\overline{PX} = dx$$

$$\overline{P'X''} = \left(x + du + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - (x + u)$$

$$= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

x方向の垂直ひずみ

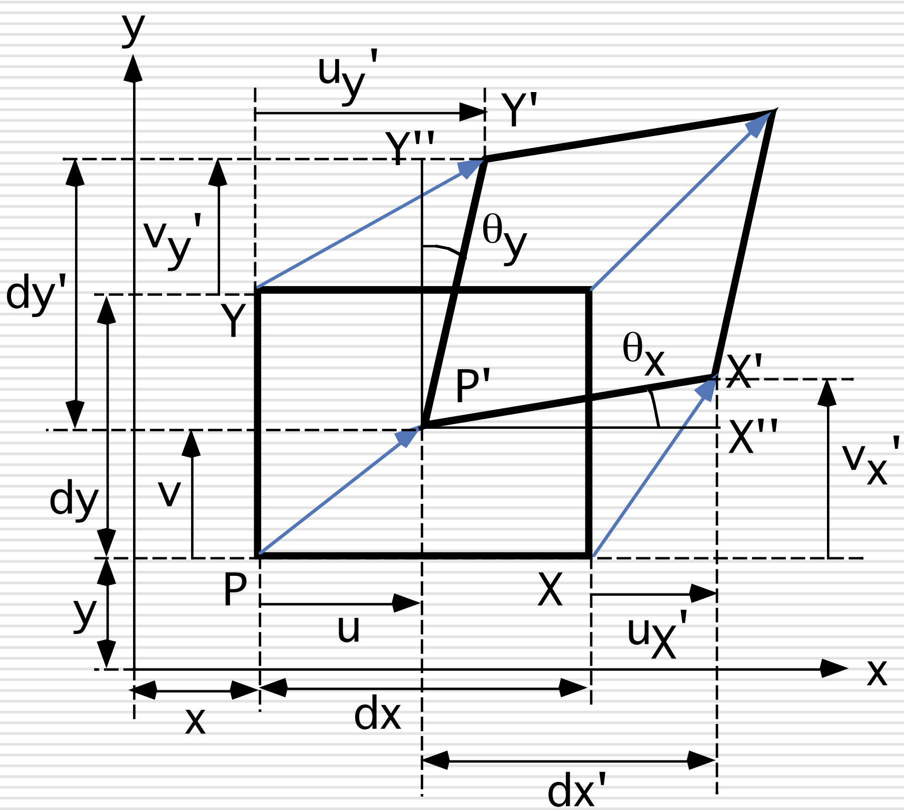
$$\varepsilon_x = \frac{\overline{P'X''} - \overline{PX}}{\overline{PX}}$$

$$= \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

y方向も同様 $\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

ひずみの定義

- ひずみー変位関係



せん断ひずみ

$$\gamma_{xy} = \theta_x + \theta_y$$

$$= \frac{\overline{X'X''}}{\overline{P'X''}} + \frac{\overline{Y'Y''}}{\overline{P'Y''}}$$

$$= \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx\right) - v}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx} + \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) - u}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy}$$

$$\approx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

工学的せん断ひずみ

ひずみの定義

□ ひずみ―変位関係

他の成分も同様に求められる。

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{dv}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

ひずみの定義

□ ひずみ－変位関係

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{\gamma_{yz}}{2}$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{zx}}{2}$$

とすると,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

テンソルひずみ

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

ひずみの定義

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

応力テンソルと同様、せん断ひずみが0となる
座標軸が存在する。

主ひずみ，　主ひずみ方向

塑性力学の枠組み

連続体の状態を支配する方程式