

3. 剛塑性有限要素法

名古屋大学大学院工学研究科 湯川伸樹

3.1 はじめに

3.2 剛塑性体の構成式

3.2.1 降伏条件

3.2.2 構成方程式 ([D]マトリックス)

3.3 節点速度 ひずみ速度関係

3.3.1 [B]マトリックス

3.3.2 四角形一次要素の[B]マトリックス

3.4 仮想仕事の原理 (剛性マトリックス ([K]マトリックス))

3.5 非線形方程式の解法

3.5.1 直接代入法

3.5.2 Newton-Raphson法

3.6 非圧縮性の拘束と数値積分

3.7 エネルギー汎関数による定式化

3.7.1 最小ポテンシャルエネルギーの原理

3.7.2 圧縮性材料特性法

3.7.3 Lagrange乗数法

3.7.4 ペナルティ法

3.8 おわりに

参考文献

演習

付録1 剛塑性FEMプログラムリスト

付録2 サンプルデータ

3.1 はじめに

一般の金属材料等では、物体にかかる力が図3.1.1(a)の破線のように小さい場合、物体にはその変形がその力に比例する弾性変形が生じる。しかし材料にかかる力が図3.1.1(a)の実線のようにある程度以上大きくなると材料に永久変形が残る塑性変形が生じる。このとき材料全体の変形は弾性変形と塑性変形の両方を重ね合わせた弾塑性変形となる。従って、塑性変形が弾性変形に比べて小さい場合や、塑性加工中に除荷が生じる場所がある場合など弾性変形が全体の変形に対して大きな役割を果たす場合、変形後の残留応力やスプリングバック量を求めたい場合などでは、弾性変形、塑性変形の両方を考慮した弾塑性変形解析を行なわなければならない。

しかしながら、鍛造や圧延（スキンプラス圧延を除く）などのように材料の受ける塑性変形が弾性変形に比べて極めて大きく、加工中の除荷もほとんどないような場合、弾性変形による影響を無視したいいわゆる剛塑性変形解析（図3.1.1(b)）を行なっても十分な精度が得られる場合が多い。そして、剛塑性変形解析の基礎式は弾性変形解析の基礎式と非常に良く似ていることが知られている。

そこで、この章では剛塑性有限要素解析の定式化の過程を、弾性的場合と比較しながら説明する。

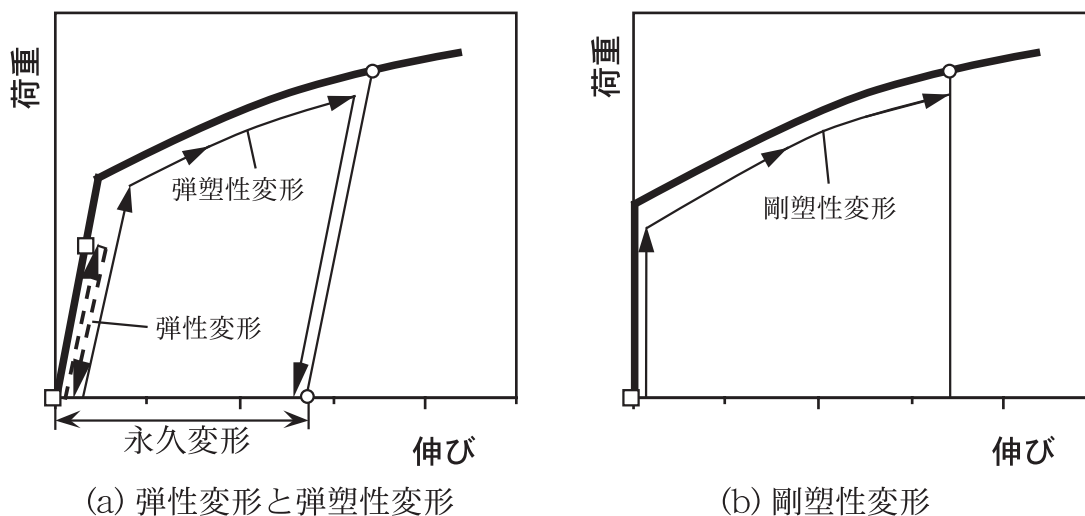


図3.1.1 荷重と伸びの関係

3.2 剛塑性体の構成式

3.2.1 降伏条件

一般の金属材料では、応力がある一定の条件になったときに塑性変形が始まると考えられ、この条件のことを降伏条件と呼ぶ。降伏条件としてよく用いられるものにMisesの降伏条件がある。これは偏差応力テンソルの不変量 J_2 が限界値に達したときに降伏が起きるとし、次式で表される。

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\} \\
&= \sigma_Y^2
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

これを図に示すと，図3.2.1のように $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ 座標で円筒で表される．この曲面は，その面上の全ての点が降伏に対して等しいポテンシャルにあると見做すことができる．そこで，このような $f(\{\sigma\}) = \text{constant}$ で定義される降伏曲面の関数を，「塑性ポテンシャル」と呼ぶことがある．

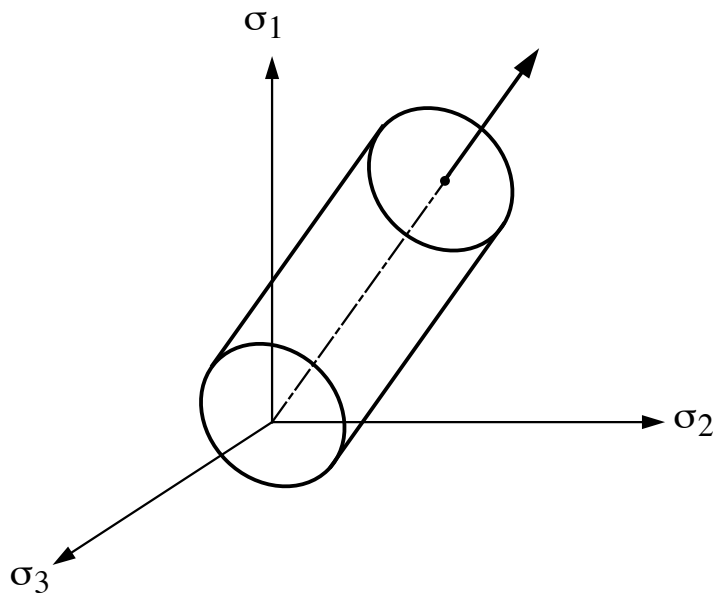


図3.2.1 Misesの降伏曲面

式(3.2.1)よりMisesの降伏条件は静水圧応力 $\sigma_m (= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3)$ に無関係であることがわかる．従って，この降伏条件を使って定式化すると偏差応力成分しか求められず，静水圧応力を求めるには特別の処理が必要である．

そのうちの一つに，圧縮性材料特性法と呼ばれるものがある．一般の金属材料の変形を考える場合，材料の体積は塑性変形に関して一定と考えられるが，その体積一定の拘束条件をゆるめて材料にわずかな体積変化を許すことによって降伏条件に静水圧応力依存性を導入し，偏差応力成分のみならず静水圧応力も直接求める方法である．この方法では次式のような降伏条件式を用いる．

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} + g\sigma_m^2 \\
&= \sigma_Y^2
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

ここで g は材料の静水圧応力依存性を示す補正係数である．この降伏曲面は，主応力座標では図3.2.1のMisesの降伏曲面に内接する回転楕円体となる．図3.2.2はその降伏曲面の断面であるが， g が 0 に近づくとともに式(3.2.2)はMisesの降伏条件，式(3.2.1)に近づく．

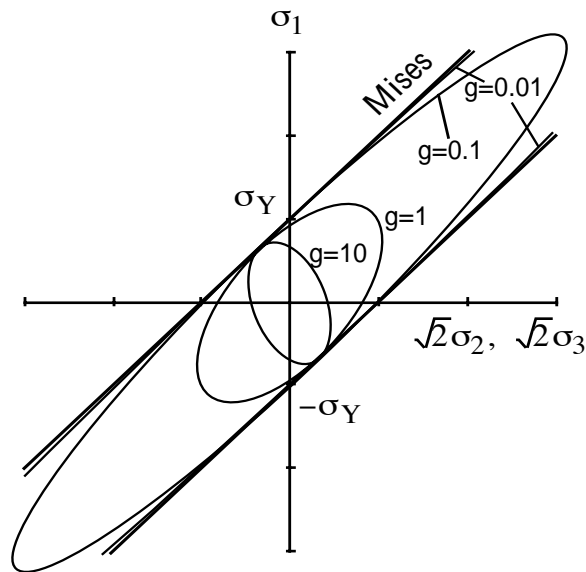


図3.2.2 圧縮性材料の降伏曲面

3.2.2 構成方程式 ([D]マトリックス)

前章の弾性体の場合ではひずみと応力は線形関係であり，変形中この関係は変わらず，1対1に対応した．すなわちひずみが定まれば応力が，応力が定まればひずみが一意に定まった．しかし塑性変形を考える場合，応力 ひずみは非線形関係となる．また塑性ひずみは負荷経路によって変わってくるため，応力とひずみが1対1に対応しない．そのため塑性変形を考える場合には，全ひずみ（ひずみがない状態から考えている状態までのトータルのひずみ）で考えるのではなく，各時点での微小時間 Δt におけるひずみ増分 $d\varepsilon$ ，または $\Delta t \rightarrow 0$ としてその時点でのひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ で考えるのが一般的である（図3.2.3）．

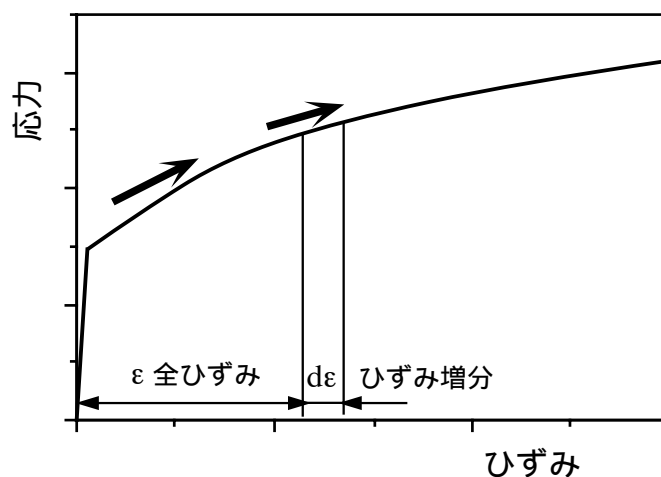


図3.2.3 全ひずみとひずみ増分

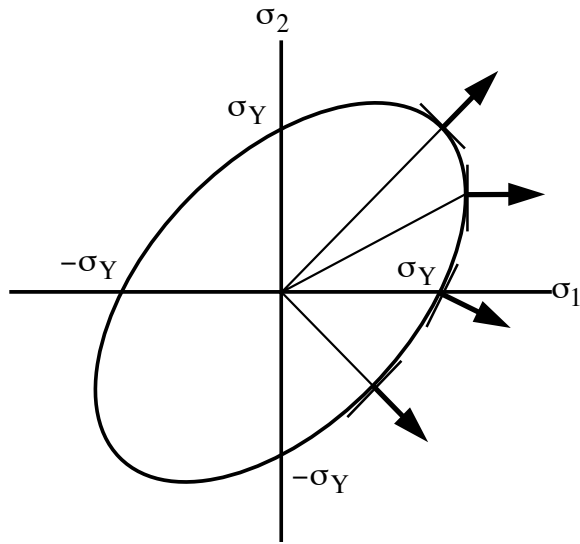


図3.2.4 降伏曲面とひずみ増分ベクトルの方向

塑性ポテンシャルを f とし，ひずみ速度ベクトルの方向は図3.2.4に示すように等塑性ポテンシャル面の法線方向を向くと仮定すると（垂直則），各ひずみ速度成分は次のように表される．

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \\ \dot{\varepsilon}_y = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \\ \dot{\varepsilon}_z = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \\ \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \\ \dot{\gamma}_{zx} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

ここで $\dot{\lambda}$ は応力やひずみ速度に依存する比例因子である．

f として式(3.2.1)で表される $\bar{\sigma}^2$ の $1/2$ を用いると，Lévy-Misesの式と呼ばれる式となる．

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \dot{\lambda} \cdot (\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_z) \\ \dot{\varepsilon}_y = \dot{\lambda} \cdot (-\frac{1}{2}\sigma_x + \sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_z) \\ \dot{\varepsilon}_z = \dot{\lambda} \cdot (-\frac{1}{2}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y + \sigma_z) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = 3\dot{\lambda} \cdot \tau_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 3\dot{\lambda} \cdot \tau_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = 3\dot{\lambda} \cdot \tau_{zx} \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$\dot{\lambda}$ は次のようにして求まる．塑性変形によって単位時間に消費されるエネルギー（塑性仕事率）を \dot{w} とすると，

$$\dot{w} = \{\sigma\}^T \{\dot{\varepsilon}\} \quad (3.2.5)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (3.2.6)$$

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}\}^T \quad (3.2.7)$$

なので，この式に式(3.2.4)を代入して整理すると，

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \lambda \left[\frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} \right] \\ &= \lambda \cdot \bar{\sigma}^2 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

ところで， $\dot{\varepsilon}$ を相当ひずみ速度と定義すると塑性仕事率は，

$$\dot{w} = \bar{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon} \quad (3.2.9)$$

と表せるので，式(3.2.8)と(3.2.9)より

$$\lambda = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \quad (3.2.10)$$

したがって，

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left\{ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right\} \\ \dot{\varepsilon}_y = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left\{ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right\} \\ \dot{\varepsilon}_z = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left\{ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right\} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = 3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = 3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{zx} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

となり，この式をマトリックスを使って書き直すと，

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.2.12)$$

となる．なお， $\dot{\varepsilon}$ は式(3.2.11)を変形して式(3.2.1)に代入して，

$$\dot{\varepsilon}^2 = \frac{2}{9} \left\{ (\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2) \right\} \quad (3.2.13)$$

と定義される．

式(3.2.12)を弾性変形の場合の応力 - ひずみ関係式

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.2.14)$$

と比較してみると，式の形が非常に似ていることが分かる．相違点としては，

- (1) 弾性変形の場合は応力とひずみ（全弾性ひずみ）の関係が示されたのに対し，式(3.2.12)では応力と塑性ひずみ速度の関係が示される．
- (2) 弾性変形ではヤング率Eは材料定数だったが， λ （ $= \dot{\varepsilon}/\sigma$ ）は応力やひずみ状態に依存するスカラー量である．
- (3) 弾性変形ではポアソン比 ν は材料に関する定数だったが，塑性変形では0.5である．

などである．

ところで，弾性変形の場合に有限要素の定式化をするときに，ひずみから応力を求める関係式

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.2.15)$$

すなわち[D]マトリックスを求める必要があった．剛塑性解析の場合も同様にひずみ速度から応力を求める関係式が必要である．しかし式(3.2.12)のマトリックスは特異であるため，この逆マトリックスは求まらない（平面応力変形の場合のみ求まる）．これはすなわちMisesの降伏条件からは偏差応力成分しか求まらず，静水圧応力は直接には求まらないことと同じ意味である．

偏差応力成分は，

$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x - \sigma_m \\ \sigma'_y = \sigma_y - \sigma_m \\ \sigma'_z = \sigma_z - \sigma_m \end{cases} \quad \begin{cases} \tau'_{xy} = \tau_{xy} \\ \tau'_{yz} = \tau_{yz} \\ \tau'_{zx} = \tau_{zx} \end{cases} \quad (3.2.16)$$

であるため，

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_x &= \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right) \\
&= \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \left(\frac{3}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right) \\
&= \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \left(\frac{3}{2} \sigma_x - \frac{3}{2} \sigma_m \right) \\
&= \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_x
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

他の成分も同様に求めると，

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_x = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_x \\ \dot{\epsilon}_y = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_y \\ \dot{\epsilon}_z = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \sigma'_z \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = 3 \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \tau'_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 3 \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \tau'_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = 3 \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \tau'_{zx} \end{cases} \tag{3.2.18}$$

となり，マトリックス表示すると，

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \end{Bmatrix} \tag{3.2.19}$$

逆の関係は，

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{\epsilon}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} \\
= [D''] \{\dot{\epsilon}\} \tag{3.2.20}$$

と表される．

ところで前述の圧縮性材料特性法を用いると，降伏条件式に静水圧応力依存性を含むため，ひずみ速度から静水圧応力成分も含めて直接応力を求めることができる．以下，その定式化を示す．

塑性ポテンシャル f として式(3.2.2)の $\bar{\sigma}^2$ の $1/2$ を用いるとする．この場合でも式(3.2.3)の垂直則が成り立つと仮定して代入すると，次式を得る．

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_x = \dot{\lambda} \cdot \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right) \\ \dot{\epsilon}_y = \dot{\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{2} \sigma_x + \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right) \\ \dot{\epsilon}_z = \dot{\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y + \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = 3\dot{\lambda} \cdot \tau_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 3\dot{\lambda} \cdot \tau_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = 3\dot{\lambda} \cdot \tau_{zx} \end{cases} \quad (3.2.21)$$

式(3.2.5)～(3.2.10)と同じようにして $\dot{\lambda}$ を求めると，この場合も

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \quad (3.2.22)$$

となる．したがって，

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_x = \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right) \\ \dot{\epsilon}_y = \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left(-\frac{1}{2} \sigma_x + \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right) \\ \dot{\epsilon}_z = \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left(-\frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y + \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = 3 \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 3 \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = 3 \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{zx} \end{cases} \quad (3.2.23)$$

マトリックス表示すると，

$$\{\dot{\epsilon}\} = \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 1 + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 1 + \frac{g}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \{\sigma\} \quad (3.2.24)$$

このマトリックスは逆マトリックスを直接求めることができる．すなわち，

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \{\dot{\varepsilon}\} \\ &= [D]\{\dot{\varepsilon}\} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

なおこの場合の相当ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ は式(3.2.2), (3.2.23)から

$$\dot{\varepsilon}^2 = \frac{2}{9} \left\{ (\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2) \right\} + \frac{1}{g} \dot{\varepsilon}_v^2 \quad (3.2.26)$$

と表される．ここで $\dot{\varepsilon}_v$ は体積ひずみ速度であり，次式で表される．

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z \quad (3.2.27)$$

式(3.2.23)より

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \cdot g \cdot \sigma_m \quad (3.2.28)$$

である．

平面ひずみ問題

平面ひずみの場合，

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_z = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0 \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \end{cases} \quad (3.2.29)$$

であるため，応力 ひずみ速度関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \left(-\frac{2}{9} + \frac{1}{g} \right) (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) \\ &= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \left(-\frac{2}{9} + \frac{1}{g} \right) \cdot \dot{\varepsilon}_v \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

となる．偏差ひずみに関する項と体積ひずみに関する項を分離して書くと，

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \\ &= ([D_D] + [D_V]) \{\dot{\varepsilon}\} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

となる．

3.3 節点速度—ひずみ速度関係

3.3.1 [B]マトリックス

弾性解析の場合，変形状態は節点の変位を基にして計算された．剛塑性解析の場合では，先に述べたようにひずみ速度を用いて応力が計算されるため，節点の変位速度が変形を記述する基礎変数となる．

x ， y ， z 方向の変位速度を \dot{u} ， \dot{v} ， \dot{w} とすると，一般に変位速度とひずみ速度の関係は次式で表される．

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \\ \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \\ \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

ただし

$$B_i = \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad C_i = \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad D_i = \frac{\partial N_i}{\partial z} \quad (3.3.5)$$

書き直すと，

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [B]\{\dot{u}^e\} \quad (3.3.6)$$

要素としてアイソパラメトリック要素を用いると，この形状関数 N_i は弾性解析のところで用いた要素内の座標を決定する形状関数と同じとなるので，式(3.3.6)の[B]マトリックスには弾性解析での[B]マトリックスと全く同一のものを使うことができる．

3.3.2 四角形一次要素の [B] マトリックス

弾性解析で用いた三角形一次要素は3.6節で述べるように，体積一定の拘束条件のために平面応力問題以外では剛塑性解析には向かない．そこで一般的には四角形一次要素 (QUAD4) がよく用いられる．ここではその [B] マトリックスを導出する．

図3.3.1に示すようなアイソパラメトリック四角形要素を考え，4つの節点の座標を (x_i, y_i) ($i, j = 1 \sim 4$)，その節点における速度を (\dot{u}_i, \dot{v}_i) とする．要素内部の点 $P(x, y)$ における座標ならびに速度を形状関数 N_i を用いて表すと，

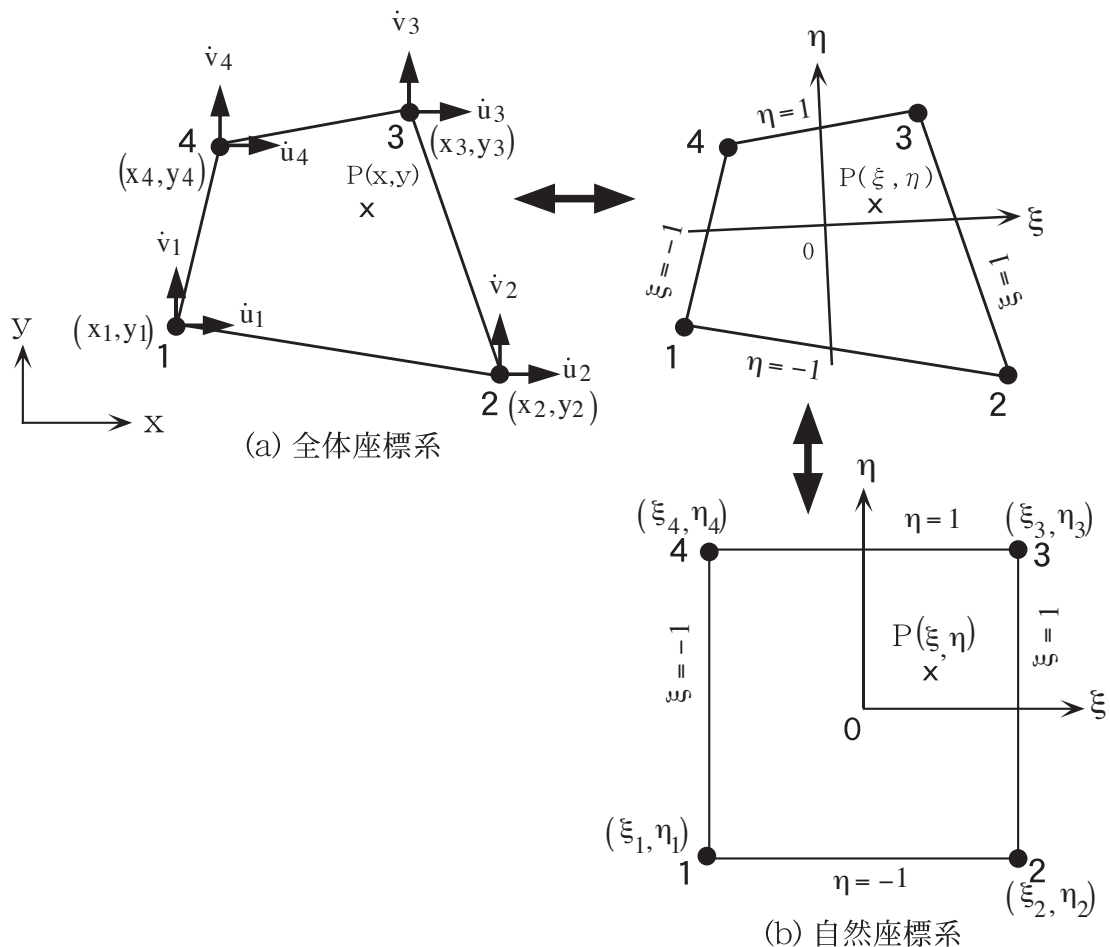


図3.3.1 四角形一次要素

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot y_i \quad (3.3.5)$$

$$\dot{u} = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot \dot{u}_i, \quad \dot{v} = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot \dot{v}_i \quad (3.3.6)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \cdot \xi)(1 + \eta_i \cdot \eta) \quad (3.3.7)$$

ここで (ξ, η) は全体座標系における点 P の座標 (x, y) を自然座標系 (局所座標系) に変換したものである (図3.3.1) . また (ξ_i, η_i) は各節点における自然座標であり ,

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_4 = \eta_1 = \eta_2 &= -1 \\ \xi_2 = \xi_3 = \eta_3 = \eta_4 &= 1 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

である . ひずみ速度は ,

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \quad (3.3.9)$$

なので , マトリックス表示すれば ,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} \quad (3.3.10)$$

従って , 式(3.3.10)に式(3.3.6)を代入すると ,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \mathbf{M} \\ \dot{u}_4 \\ \dot{v}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.3.11)$$

すなわち

$$\{\dot{\epsilon}\} = [\mathbf{B}] \{\dot{u}^e\} \quad (3.3.12)$$

形状関数 N_i は自然座標系を用いて表されているが , 全体座標系への微分変換は全微分公式を用いて次のように表される .

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

マトリックスで表すと

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.3.14)$$

従って，

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.3.15)$$

ここで， $|\mathbf{J}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$ であり，ヤコビアンと呼ばれる。

式(3.3.11)に式(3.3.15)，(3.3.5)，(3.3.7)を代入することにより，

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{12} & 0 & B_{13} & 0 & B_{14} & 0 \\ 0 & B_{21} & 0 & B_{22} & 0 & B_{23} & 0 & B_{24} \\ B_{21} & B_{11} & B_{22} & B_{12} & B_{23} & B_{13} & B_{24} & B_{14} \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

$$B_{1i} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)$$

$$B_{2i} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta_i \eta) \xi_i, \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi) \eta_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i$$

となり，要素内部の点の座標 (ξ, η) 並びに節点座標 (x_i, y_i) を与えることにより， $[\mathbf{B}]$ マトリックスを求めることができる。

3.4 仮想仕事の原理（剛性マトリックス（[K]マトリックス））

微小変形理論における剛塑性体の基礎方程式を以下にまとめる．剛塑性体が外力 $\{T_0\}$ ，体積力 $\{\bar{b}\}$ を受けて平衡状態にあるとすると，以下の式を満足していなければならない．

(1) 力の釣り合い方程式

剛塑性変形解析においても，力学的な力の釣り合い条件をみたさなければならない．これは弾性解析と同様に次式のように表される．

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{b}_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \bar{b}_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{b}_z = 0 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

(2) 変位速度 ひずみ速度関係式

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \\ \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \\ \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \end{cases} \quad (3.4.2)$$

(3) 応力 ひずみ速度関係式（圧縮性材料特性法の場合）

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.4.3)$$

$$= [D] \{\dot{\epsilon}\}$$

これらの15の未知数（速度3つ，ひずみ6つ，応力6つ）からなる15個の連立方程式，式(3.4.1)～(3.4.3)を以下の境界条件のもとで解くことになる．

(4) 力学的境界条件

外力 $\{T_0\}$ を受けている表面 S_f 上で,

$$\{T\} = \{T_0\} \quad (3.4.4)$$

(5) 幾何学的境界条件

速度が固定されている表面 S_u 上で,

$$\{\dot{u}\} = \{\dot{u}_0\} \quad (3.4.5)$$

以上より, 剛塑性解析における支配方程式は, 弾性解析の場合と比べると変位速度が主要変数になっただけで, 式の形としては同じであることが分かる. したがってこの場合の仮想仕事の原理 (正確には仮想仕事率の原理) も, 弾性解析で仮想仕事の原理の式を導いたのと全く同じ手順で導出できる.

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\delta \dot{\epsilon}\} dV = \int_{S_f} \{T_0\}^T \{\delta \dot{u}\} dS + \int_V \{\bar{b}\}^T \{\delta \dot{u}\} dV \quad (3.4.6)$$

ここで $\{\delta \dot{u}\}$ は任意の仮想節点速度増分 (ただし S_u 上で $\delta \dot{u} = 0$), $\{\delta \dot{\epsilon}\}$ はその仮想節点速度増分によるひずみ速度の変化である.

この式が任意の $\{\delta \dot{u}\}$ に対して成り立つので, 要素剛性方程式は次のように表される.

$$\begin{aligned} \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dv \cdot \{\dot{u}^e\} &= \int_{S_f} [N]^T \{T_0\} dS + \int_{V^e} [N]^T \{\bar{b}\} dV \\ &= \{F^e\} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

あるいは, $[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dv$ とおいて,

$$[K^e] \cdot \{\dot{u}^e\} = \{F^e\} \quad (3.4.8)$$

と表される.

これを全ての要素に拡張して, 次式のような全体剛性方程式が得られる.

$$[K] \{\dot{U}\} = \{F\} \quad \text{ただし} \quad \begin{cases} [K] = \sum_{\text{All Elements}} [K^e] \\ \{F\} = \sum_{\text{All Nodes}} \{F^e\} \\ \{\dot{U}\} = \sum_{\text{All Nodes}} \{\dot{u}^e\} \end{cases} \quad (3.4.9)$$

ここで $[K]$ は全体剛性マトリックス, $\{F\}$ は全節点力ベクトル, $\{\dot{U}\}$ は全節点速度ベクトルである.

[K]や{F}の組立に関しても弾性解析と全く同じ手法が使える．数値積分の方法については，要素の種類によっては特殊な処理が必要な場合もあるが（後述），基本的にはGauss積分法を用いることができる．

節点速度はこの方程式(3.4.9)を解けば求まるが，弾性解析と異なるのは[K]マトリックスの中の[D]マトリックスが節点速度の関数であること，すなわちこの方程式は非線形方程式となることである．したがってこの方程式は1回の計算では解けず，反復計算が必要となる．

3.5 非線形方程式の解法

3.5.1 直接代入法

式(3.4.9)の非線形方程式を解く一つの方法は，繰り返し計算の中で[K]マトリックスを変化させる方法である．すなわち問題

$$[K(\{\dot{U}\})]\{\dot{U}\} - \{F\} = 0 \quad (3.5.1)$$

に対して，まず[K]マトリックスの初期値[K₀]を求める．つぎに第一近似として

$$[K_0]\{\dot{U}_1\} - \{F\} = 0 \quad (3.5.2)$$

より{U₁}を求める．この{U₁}をもとに[K₁]を求める．以下同様に第n近似として

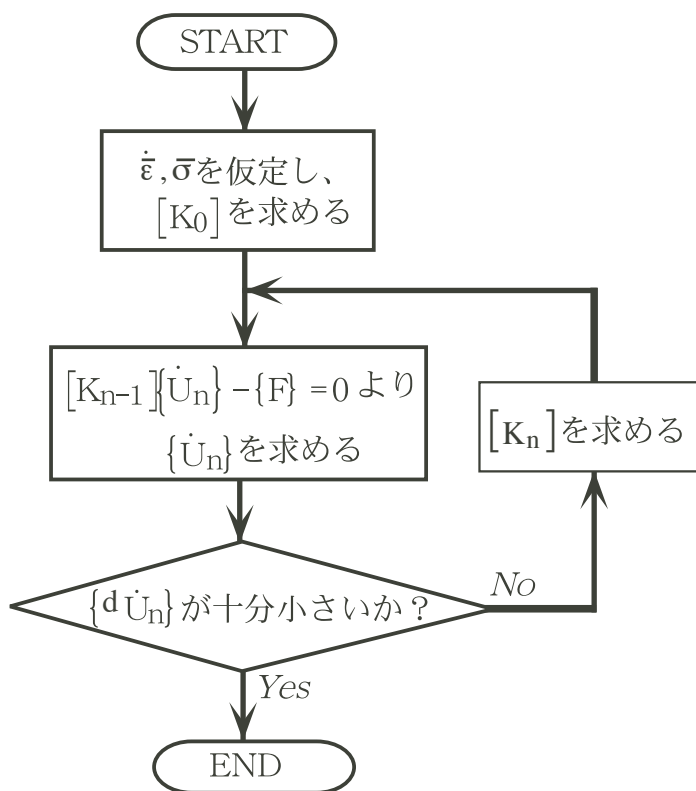


図3.5.1 直接代入法のフローチャート

$$[K_{n-1}]\{\dot{U}_n\} - \{F\} = 0 \quad (3.5.3)$$

を繰り返し求め、 $\{\dot{U}\}$ がほとんど変化しなくなった時点で解とする。以上の手順をフローチャートにして図3.5.1に示す。

この方法の問題点は $[K_0]$ をどうやって求めるかということと、近似解 $\{\dot{U}_n\}$ が正解に近くなると収束が遅くなるという点である。 $[K_0]$ を求める方法としては、 $[D]$ マトリックス中の $\bar{\epsilon}$ 、 $\bar{\sigma}$ にある平均的な値を代入するなどがある。

3.5.2 Newton-Raphson法

一般的な方程式

$$f(x) = 0 \quad (3.5.4)$$

を解く方法としてNewton法はよく知られている。これは図3.5.2に示すように、式(3.5.4)のある近似解 x_n に対して、その補正量 Δx_n を

$$\Delta x_n = -\frac{f(x_n)}{\left(\frac{df}{dx}\right)} \quad (3.5.5)$$

として求め、改良された解を

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \quad (3.5.6)$$

として求めていく方法である。

これを多変数の非線形方程式に拡張する。多変数問題

$$\{\varphi(\{\dot{U}\})\} = [K(\{\dot{U}\})]\{\dot{U}\} - \{F\} = 0 \quad (3.5.7)$$

をその近似解 $\{\dot{U}_n\}$ まわりでの展開すると、

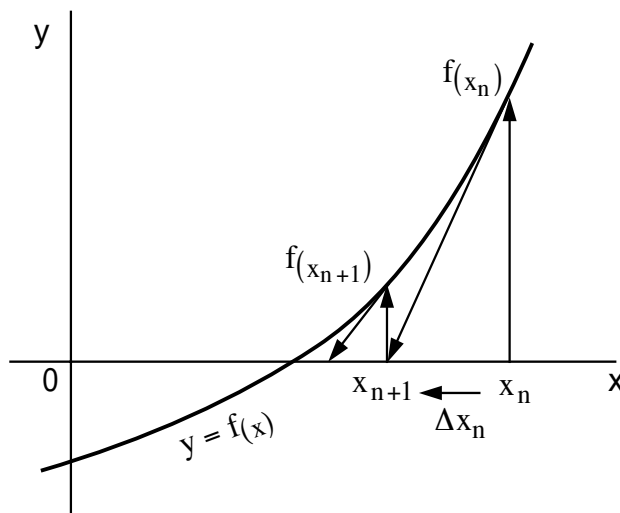


図3.5.2 Newton法

$$\{\varphi(\{\dot{U}\})\} = \{\varphi(\{\dot{U}_n\})\} + [K_T(\{\dot{U}_n\})]\{d\dot{U}\} = 0 \quad (3.5.8)$$

となる．ここで $[K_T]$ は接線剛性マトリックスであり，その成分は

$$K_{T_{ij}} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \dot{u}_j} \right)_{\dot{U}=\dot{U}_n} = \left(K_{ij} + \sum_k \left(\frac{\partial K_{ik}}{\partial \dot{u}_j} \dot{u}_k \right) - \frac{\partial F_i}{\partial \dot{u}_j} \right)_{\dot{U}=\dot{U}_n} \quad (3.5.9)$$

で表される．

式(3.5.8)より， $\{\dot{U}_n\}$ に対しその補正量 $\{d\dot{U}_n\}$ は

$$\{d\dot{U}_n\} = -[K_T(\{\dot{U}_n\})]^{-1} \{\varphi(\{\dot{U}_n\})\} \quad (3.5.10)$$

で求まり，

$$\{\dot{U}_{n+1}\} = \{\dot{U}_n\} + \{d\dot{U}_n\} \quad (3.5.11)$$

として次の近似解 $\{\dot{U}_{n+1}\}$ が求まる．これを $\{d\dot{U}_n\}$ が十分小さくなるまで繰り返すことにより，非線形方程式，式(3.5.7)の解を得る．以上のフローチャートを図3.5.3に示す．

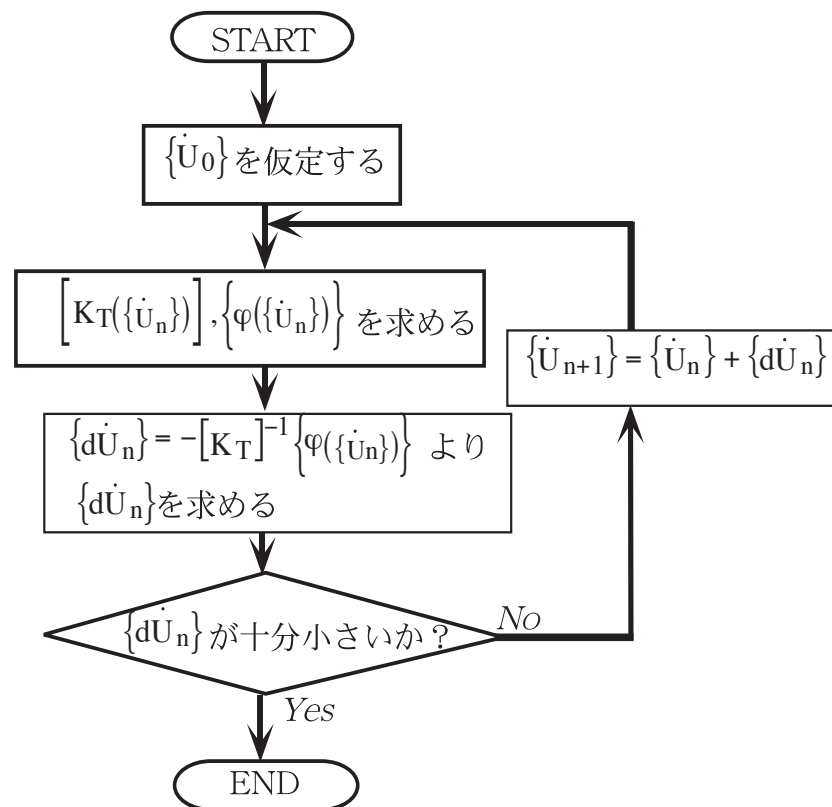


図3.5.3 Newton-Raphson法のフローチャート

この方法は初期速度場 $\{\dot{U}_0\}$ が正解に近い場合には、少ない繰り返し回数で解が得られる。しかし反面、 $\{\dot{U}_0\}$ がある程度正解に近くないと解が発散したり振動したりして正解に収束しない場合がある。

初期速度場 $\{\dot{U}_0\}$ を求めるには、直接代入法によってある程度収束した速度場を用いるなどの方法がある。

3.6 非圧縮性の拘束と数値積分

有限要素法において、基礎式には積分が含まれる。三角形 1 次要素、あるいは 3 次元の場合には四面体 1 次要素では被積分項が要素内で一定となるため、積分計算は極めて簡単であった。しかし、その他の要素ではこの積分は複雑になるため、通常数値積分法が用いられる。四角形要素や六面体要素では Gauss の数値積分法がよく用いられる。これは正規化された区間 $[-1, 1]$ に対する Gauss 積分公式、

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{m_1} w_i f(\xi_i) \quad (3.6.1)$$

を用いて積分計算を行うもので、2 次元の場合、3 次元の場合はそれぞれ、

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{i=1}^{m_1} w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.6.2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \varsigma) d\varsigma d\eta d\xi = \sum_{k=1}^{m_3} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{i=1}^{m_1} w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) \quad (3.6.3)$$

と表せる。 m_1, m_2, m_3 はそれぞれ ξ, η, ς 方向の積分点の数である。積分点の座標および重み係数を表3.6.1に示す。

表3.6.1 Gauss求積法の積分点座標と重み係数

	積分点の座標 ($\xi_i, \eta_j, \varsigma_k$)	重み係数 (w_i, w_j, w_k)
1 点	0	2
2 点	$\pm 0.5773 \ 5026 \ 9189 \ 626$ ($\pm 1/\sqrt{3}$)	1
3 点	0 $\pm 0.7745 \ 9666 \ 9241 \ 438$ ($\pm \sqrt{3/5}$)	0.8888 8888 8888 888 (8/9) 0.5555 5555 5555 555 (5/9)

ところで非圧縮性材料の場合，あるいは圧縮性材料特性法の場合でも g が小さくほぼ非圧縮性材料とみなせるようなときで，平面応力問題以外の場合には，要素の選択および数値積分の方法に注意を要する．このことを材料 工具間が固着の平面ひずみ圧縮問題を用いて説明する．

図3.6.1のように三角形1次要素を用いて要素分割した場合を考える．まず $\triangle ADE$ について考えると，端面固着条件より \overline{AD} は一定であるため，体積一定条件を満たすためには \overline{AE} も一定でなければならない．従って $\triangle ADE$ は全く変形できない．つぎに $\triangle DEF$ を考えると， \overline{DE} は一定であるため点 F は DE に平行にしか動けない．ところが $\triangle DFG$ において \overline{DG} は一定であるため点 F は \overline{DG} に平行にしか動けず，結局 $\triangle DEF$ ， $\triangle DFG$ 共に変形ができない．この考え方を進めていくと，最終的には $\triangle OAB$ 全体が変形できなくなり，領域全体が圧縮不可能となる．

このようになる原因は，全体の拘束（境界の拘束および体積一定条件による拘束）が全体の自由度より大きいことにある．図3.6.1の例では節点の全自由度 N_F は32（16個の各節点に対し，それぞれ x 方向， y 方向の2つの自由度）であるのに対し，境界の拘束数（既知速度の数） N_B は15あり，また体積ひずみは各要素で一定であるため，体積一定条件による拘束数 N_V は18（18要素 \times 1）であるので，明らかに拘束の方が全自由度より大きく，過拘束となっている．この状況は要素数を増やしても変わらないため，三角形1次要素は剛塑性解析には向かないことが分かる．

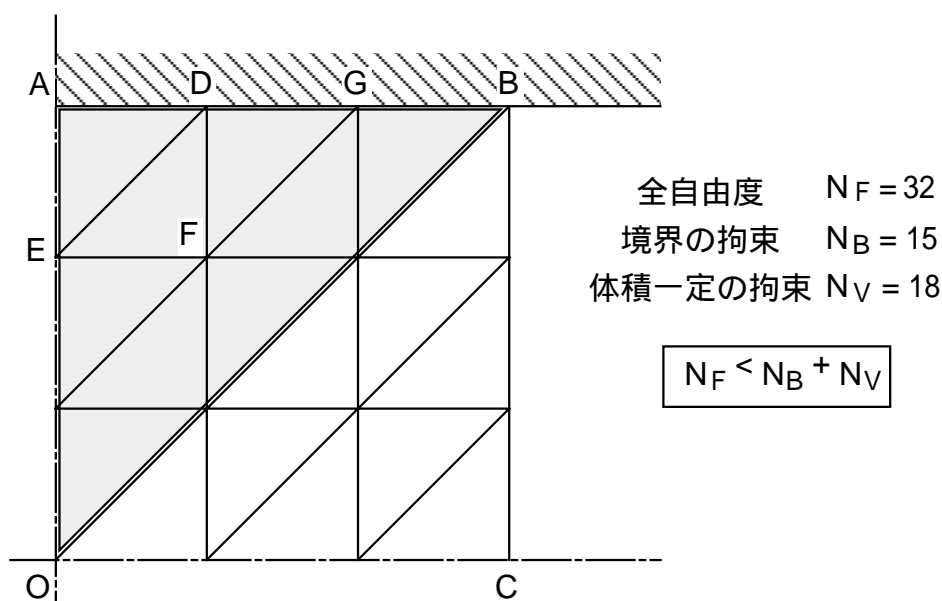


図3.6.1 剛塑性解析に三角形1次要素を用いた場合

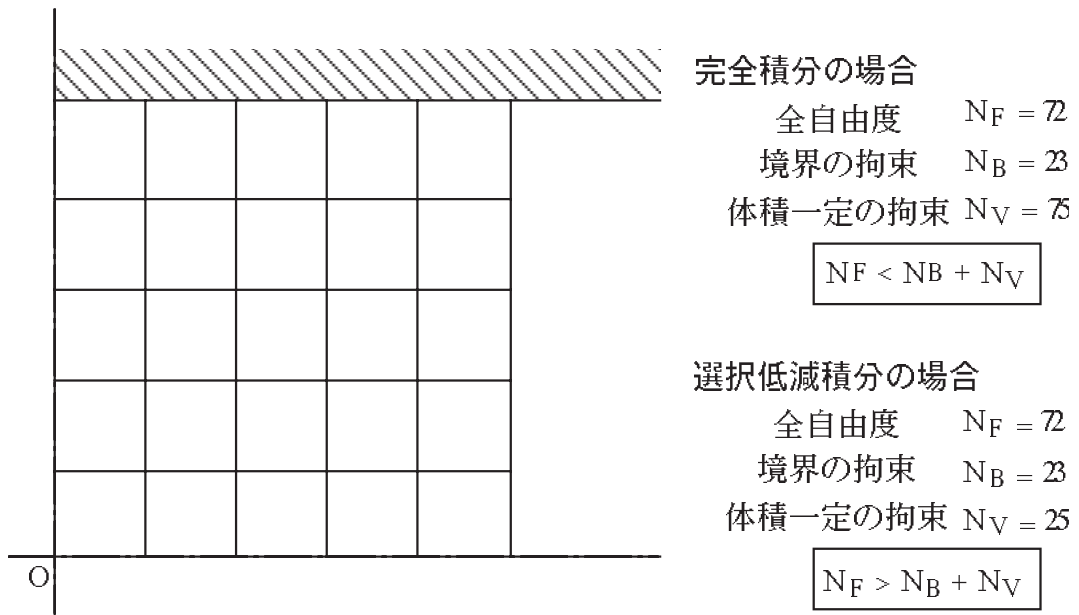


図3.6.2 四角形 1 次要素を用いた場合

つぎに図3.6.2のような四角形 1 次要素を用いた場合を考えてみる．この要素では要素内部のひずみは，

$$\dot{\epsilon}_v = A + Bx + Cy \quad (3.6.4)$$

という形で x ， y 方向に 1 次式で表されるため，要素内のあらゆる場所で体積一定条件を満足させるためには，

$$A = 0, B = 0, C = 0 \quad (3.6.5)$$

でなくてはならない．すなわち一つの要素あたり 3 つの拘束が加わることになる．従って，この例では 36 節点，25 要素であるため，全自由度 $N_F = 72$ に対して体積一定の拘束は $N_V = 75$ であり，そのままではこの場合も明らかに過拘束である．

ところで 4 節点四角形要素を用いた場合，要素内の積分に前述のように Gauss の数値積分法がしばしば用いられる．ひずみ応力は要素内で x ， y 方向に一次式で表されるため，図 3.6.3(a) のようにそれぞれの方向で 2 点積分すると，解析的に完全積分した場合と等しい結

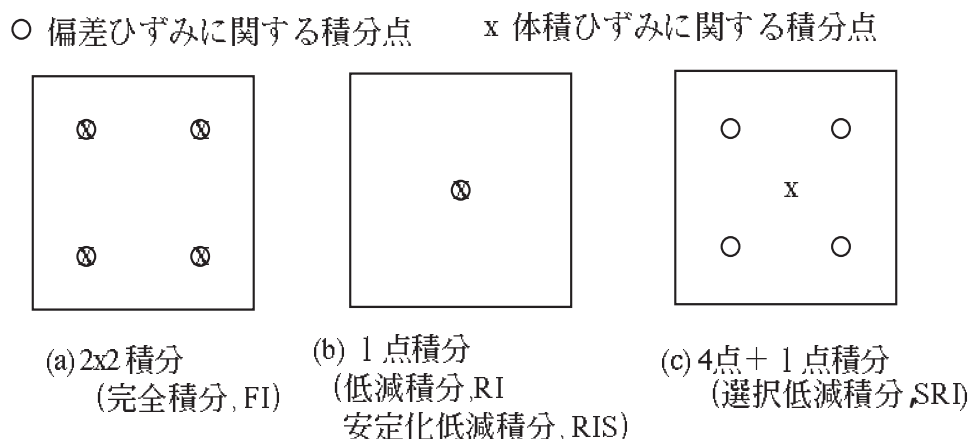


図3.6.3 四角形要素の数値積分

果が得られる．しかしそれより少ない積分点で積分をした場合，それぞれの積分点において体積一定条件が加えられることになるため，一つの要素あたりの体積一定の拘束数は一つの要素内の積分点の数 N_G と等しくなる．そのため積分点の数を減らせば体積一定の拘束を減らすことができる．図3.6.2において図3.6.3(b)のように，両方向に1点積分を行なうと（低減積分(reduced integration, RI)），体積一定の拘束数 $N_V = 25$ と境界の拘束数 $N_B = 23$ を足した全拘束数は48となり，全自由度を下回る．ただし1点積分を行なうということは，要素内でひずみや応力が一定と評価することと同じなので，剛性マトリックスの精度が低下する．具体的には2つの要素がペアになって計算上エネルギー0で変形するような，アワーグラス(hour glass)あるいはゼロ・エネルギー・モード(zero energy mode, ZEM)と呼ばれる変形モードが生じる（図3.6.4(a)）．このことを避けるために，体積ひずみに関する項だけ1点積分し，その他の項は2x2の4点積分する選択低減積分法(selective reduced integration, SRI)（図3.6.3(c)，図3.6.4(b)）や，全ての成分に対し1点積分を行った上でゼロ・エネルギー・モードを打ち消すような安定化マトリックスを加える安定化低減積分法(reduced integration with stabilization, RIS)などを用いる必要がある．

なお，平面応力問題においては ε_z が従属変数であるため，体積一定の拘束条件はそこで吸収される．すなわち平面応力問題においては，三角形1次要素や完全積分四角形1次要素を用いても，体積一定の拘束による問題は生じないことを付け加えておく．

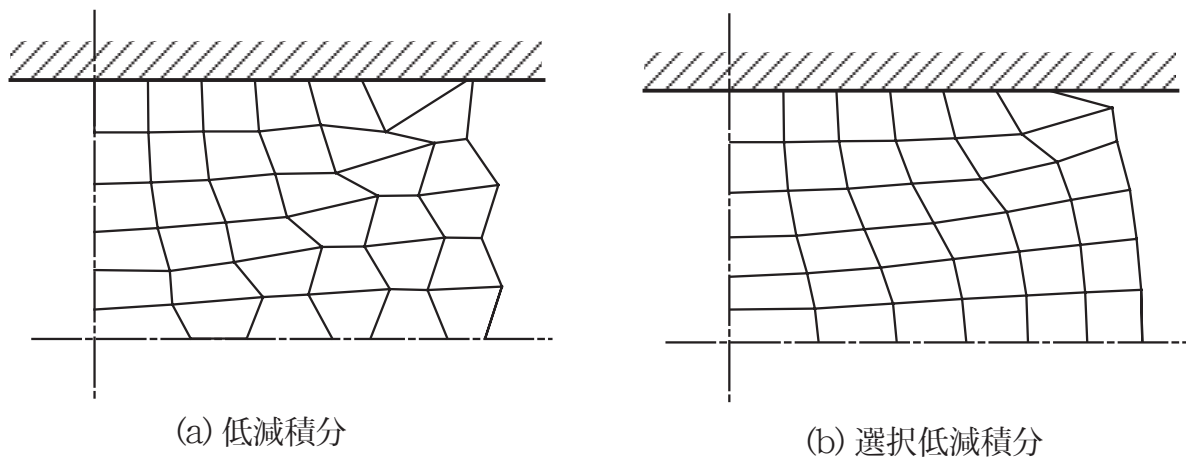


図3.6.4 平面ひずみ圧縮の計算例

3.7 エネルギー汎関数による定式化

3.7.1 最小ポテンシャルエネルギーの原理

ここまでは弾性有限要素法の場合と同様に，仮想仕事の原理をもとに定式化を行ってきた．しかし剛塑性有限要素法はもともと全体のポテンシャルエネルギーが最小になるように節点速度を決定するという，上界法の最適化手法の一種として発達してきた．そこでこの章では，汎関数(functional)の最小化というRitz型の剛塑性有限要素法の定式化を示す．

Markovの変分原理によると，次の汎関数は動的可容速度場(kinematically admissible velocity field)（体積一定の条件と速度の境界条件を満足する任意の速度場）が正解と一致したとき，最小となる．

$$\Phi(\dot{\mathbf{u}}) = \int_V \left(\int_0^{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV - \int_{S_F} \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{u}} dS \quad (3.7.1)$$

ここで $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ は相当応力， $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は相当ひずみ速度， \mathbf{F} は境界に作用する外力ベクトル， $\dot{\mathbf{u}}$ は速度ベクトルであり，また V は物体の体積， S は表面積である．この式の左辺第1項は物体内部で消費される塑性エネルギー消散率であり，第2項は符号も含めて物体が外力にたいしてなす仕事率である．この汎関数を最小化する動的可容速度場を求めることができれば，そのとき応力の釣り合い条件も満足され正解となる．

しかし非圧縮性の条件を最初から速度場に仮定しているため，変形が複雑な場合には速度場の決定が難しい．また一般に上界法では速度場から応力分布は平面応力変形の場合以外は求まらない．そこで，以下に示すような定式化を行う．これらの方法により，非圧縮性の条件を満足させながら汎関数を最小化する速度場が求められ，その速度場から応力分布も求めることができる．

3.7.2 圧縮性材料特性法

先に説明したように，材料にわずかな体積変化を許容した降伏関数を用いることによって，非圧縮性の拘束から生じる問題を避けることができる．すなわち，次式のようにMisesの降伏条件に静水圧応力 σ_m が影響する項を入れる．

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 = & \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right\} \\ & + 6(\tau_{xy} + \tau_{xy} + \tau_{xy}) + g\sigma_m^2 \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

このような降伏条件に対しても同様の変分原理が成立し，次の汎関数が最小となる速度場が正解となる．

$$\begin{aligned} \Phi(\dot{\mathbf{u}}) &= \int_V \left(\int_0^{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV - \int_{S_F} \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{u}} dS \\ &= \Phi_D + \Phi_F \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

$\dot{\epsilon}$ は式(3.7.2)に対応した相当ひずみ速度であり，

$$\dot{\epsilon}^2 = \frac{2}{9} \left\{ (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2) \right\} + \frac{1}{g} \dot{\epsilon}_v^2 \quad (3.7.4)$$

である．式(3.7.3)を最小化する $\dot{\mathbf{u}}$ は次の連立方程式を解くことによって，求められる．

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{u}})}{\partial \dot{u}_k} = 0 & (k=1 \sim n, \text{ nは全自由度数}) \end{cases} \quad (3.7.5)$$

この場合，速度場は体積一定の拘束条件はないが， g の値が十分小さい場合には結果的に汎関数の最小化の過程で近似的に体積一定の条件が満足される．

内挿した速度場からその要素における汎関数 Φ^e が求められ，すべての要素についてそれを加え合わせるにより全体の汎関数が求まる．

$$\Phi = \sum_{NE} \Phi^e \quad (3.7.6)$$

従って， Φ の $\dot{\mathbf{u}}$ による偏微分もそれぞれの要素で考えて最後にそれを加え合わせればよい．式(3.7.4)より，

$$\dot{\epsilon}^2 = \{\dot{\epsilon}\}^T [D'] \{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{u}^e\}^T [B]^T [D'] [B] \{\dot{u}^e\} \quad (3.7.7)$$

$$[D'] = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (3.7.8)$$

なので，内部仕事の項 Φ_D に関しては

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial \Phi_D^e}{\partial \dot{u}_k^e} \right\} &= \int_{V_e} \left(\frac{\partial \int_0^{\dot{\epsilon}} \tilde{\sigma} d\dot{\epsilon}}{\partial \dot{u}_k^e} \right) dV \\
&= \int_{V_e} \left(\frac{\partial \int_0^{\dot{\epsilon}} \tilde{\sigma} d\dot{\epsilon}}{\partial \dot{\epsilon}} \cdot \frac{\partial \dot{\epsilon}}{\partial \dot{u}_k^e} \right) dV \\
&= \int_{V_e} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2\dot{\epsilon}} \cdot \frac{\partial \dot{\epsilon}^2}{\partial \dot{u}_k^e} \right) dV \\
&= \int_{V_e} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \cdot [B]^T [D] [B] \right) \{ \dot{u}^e \} dV \\
&= \int_{V_e} \left([B]^T [D] [B] \right) dV \{ \dot{u}^e \} \\
&= [K_u^e] \{ \dot{u}^e \}
\end{aligned} \tag{3.7.9}$$

となる .

外力の項に関しても , 節点における外力を $\{F'\}$ とすると

$$\begin{aligned}
\Phi_F^e &= - \int_{S_{Fe}} \{ \dot{u} \}^T \{ F \} dS \\
&= - \{ \dot{u}^e \}^T \int_{S_{Fe}} [N]^T [N] dS \{ F' \}
\end{aligned} \tag{3.7.10}$$

ここで改めて

$$\{ F^e \} = \int_{S_{Fe}} [N]^T [N] dS \{ F' \} \tag{3.7.11}$$

とおくと ,

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_F^e}{\partial \dot{u}^e} \right\} = - \{ F^e \} \tag{3.7.12}$$

となる .

従って以上をまとめると ,

$$[K^e] \{ \dot{u}^e \} = \{ F^e \} \tag{3.7.13}$$

となり , 仮想仕事の原理から導出した要素剛性方程式と全く同一となる .

応力は既に示したように ,

$$\begin{aligned}
\{ \sigma \} &= [D] \{ \dot{\epsilon} \} \\
&= \frac{\tilde{\sigma}}{\dot{\epsilon}} [D'''] \{ \dot{\epsilon} \} + \frac{\tilde{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \left(\frac{1}{g} - \frac{2}{9} \right) [C'] \{ \dot{\epsilon} \}
\end{aligned} \tag{3.7.14}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7.15)$$

$$[D'''] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7.16)$$

として求められる。

3.7.3 Lagrange 乗数法

体積一定の拘束条件を汎関数に対する付帯条件と考えて、数学的に処理する方法もある。そのひとつがLagrange乗数（Lévy-Misesの式で用いた λ とは別のものである）を用いて次式のように汎関数の中に組み込む方法である。

$$\begin{aligned} \Phi(\dot{\mathbf{u}}) &= \int_V \left(\int_0^{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \bar{\sigma} d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV - \int_{S_F} \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{u}} dS + \int_V \lambda \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v dV \\ &= \Phi_D + \Phi_F + \Phi_V \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

ここで $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v$ は体積ひずみ速度である。ここでは速度場 $\dot{\mathbf{u}}$ は速度の境界条件のみを満足すればよく、体積一定条件の制約は仮定しない。しかしこの汎関数を最小化する速度場 $\dot{\mathbf{u}}$ およびLagrange乗数を求めることにより、結果的に体積一定の条件が満足される。

式(3.7.17)を最小にする $\dot{\mathbf{u}}$ および λ を求めるには、次の連立微分方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}_k} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = 0 \end{cases} \quad (k=1 \sim n, \quad 1=1 \sim m, \quad n \text{は全自由度数, } m \text{は } \lambda \text{の全数}) \quad (3.7.18)$$

降伏条件としてMisesの条件を採用すると、相当ひずみは

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T [D'''] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \{\dot{\mathbf{u}}^e\}^T [B]^T [D'''] [B] \{\dot{\mathbf{u}}^e\} \quad (3.7.19)$$

なので、内部仕事による項 Φ_D に関しては式(3.7.9)と同様に、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Phi_D^e}{\partial \dot{u}^e_k} \right\} &= \int_{V_e} ([B]^T [D'' [B]) dV \{ \dot{u}^e \} \\ &= [K_u^e] \{ \dot{u}^e \} \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

$$[D''] = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} [D'''] \quad (3.7.21)$$

また

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_D^e}{\partial \lambda^e_1} \right\} = 0 \quad (73..23)$$

である .

外力による項についても式(3.7.10) ~ (3.7.12)と同様 ,

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_F^e}{\partial \dot{u}^e_k} \right\} = - \{ F^e \} \quad (3.7.24)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_F^e}{\partial \lambda^e_1} \right\} = 0 \quad (3.7.25)$$

体積一定の拘束条件による付加項については , に対する形状関数およびそれに対応した[B]マトリックスをそれぞれ $\{N_\lambda\}$, $[B_\lambda]$ とすると ,

$$\begin{aligned} \Phi_v^e &= \int_{V_e} \lambda \cdot \dot{\epsilon}_v dV \\ &= \int_{V_e} \{ \lambda^e \}^T \{ N_\lambda \}^T \cdot \{ P \}^T [B_\lambda] \{ \dot{u}^e \} dV \end{aligned} \quad (3.7.26)$$

$$\{ P \} = \{ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \}^T \quad (3.7.27)$$

なので ,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Phi_v^e}{\partial \dot{u}^e_k} \right\} &= \int_{V_e} [B_\lambda]^T \{ P \} \{ N_\lambda \} dV \{ \lambda^e \} \\ &= [K_\lambda^e] \{ \lambda^e \} \end{aligned} \quad (3.7.28)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Phi_v^e}{\partial \lambda^e_1} \right\} &= \int_{V_e} \{ N_\lambda \}^T \{ P \}^T [B_\lambda] dV \{ \dot{u}^e \} \\ &= [K_\lambda^e]^T \{ \dot{u}^e \} \end{aligned} \quad (3.7.29)$$

以上をまとめると，次のような要素剛性方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^e & \mathbf{K}_\lambda^e \\ \mathbf{K}_\lambda^{eT} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^e \\ \lambda^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7.30)$$

Lagrange乗数法では体積一定の条件を厳密に満足させることが出来るため精度は高いが，変数の数が の分だけ多いので計算量が増える．また弾性解析などでは全体剛性マトリックスは図3.7.1(a)のようなバンドマトリックス(band matrix)となるが，式(3.7.30)から組み立てた全体剛性マトリックスは通常，図3.7.1(b)のように複雑になり計算の単純化を行いくらいなどの問題がある．

正解においては は静水圧応力 σ_m と等しくなることが知られている．従って応力は次式によって計算することが出来る．

$$\sigma_m = \lambda \quad (3.7.31)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma'\} + \sigma_m \{P\} \\ &= \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} [D'''] \{\dot{\epsilon}\} + \sigma_m \{P\} \end{aligned} \quad (3.7.32)$$

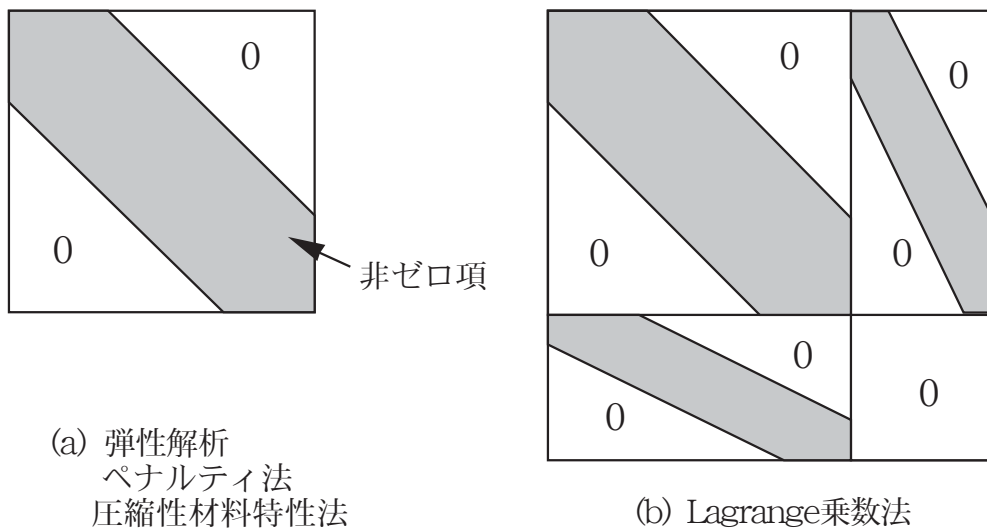


図3.7.1 全体剛性マトリックスの形

3.7.4 ペナルティ法

体積一定条件を満足させるのにペナルティ法を用いる場合もある．その場合，式(3.7.3)に正の大きなペナルティ定数 $\bar{\lambda}$ を導入して次式のようにする．

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{\mathbf{u}}) &= \int_V \left(\int_0^{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV - \int_{S_F} \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{u}} dS + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \int_V (\dot{\varepsilon}_v)^2 dV \\ &= \Phi_D + \Phi_F + \Phi_P\end{aligned}\quad (3.7.33)$$

このようにすることによって最後の項が $\dot{\varepsilon}_v=0$ に対するペナルティとなり，結果的に体積一定条件が近似的に満足される．第1項，第2項の速度による微分は，Lagrange乗数法と同様である．ペナルティ項に関しては

$$\dot{\varepsilon}_v^e = \{P\} [B] \{\dot{\mathbf{u}}^e\} \quad (3.7.34)$$

なので，

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial \Phi_P^e}{\partial \dot{\mathbf{u}}_k} \right\} &= \bar{\lambda} \int_{V_e} [B]^T \{P\}^T \{P\} [B] dV \{\dot{\mathbf{u}}^e\} \\ &= \bar{\lambda} [K_P^e] \{\dot{\mathbf{u}}^e\}\end{aligned}\quad (3.7.35)$$

となる．従って要素剛性マトリックスは，

$$\left([K^e] + \bar{\lambda} [K_P^e] \right) \{\dot{\mathbf{u}}^e\} = \{F^e\} \quad (3.7.36)$$

となり，この場合も全体剛性マトリックスは図3.7.1(a)のように単純なバンドマトリックスとなる．

応力は求まった速度場から，次式により得られる．

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{\sigma}\} &= \{\boldsymbol{\sigma}'\} + \bar{\lambda} \{P\} \dot{\varepsilon}_v \\ &= \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} [D'''] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} + \bar{\lambda} [C] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}\end{aligned}\quad (3.7.37)$$

式(3.7.37)を圧縮性材料特性法の場合の式(3.7.14)と比較するとほぼ同様の形をしている．

このことより圧縮性材料特性法は $\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \left(\frac{1}{g} - \frac{2}{9} \right)$ という場所によって異なる値をペナルティ数とする一種のペナルティ法と見ることができる．

3.8 おわりに

以上，この章では剛塑性有限要素解析に必要な剛塑性体の基礎式，有限要素の定式化，非線形方程式の解法等を解説してきた．そして剛塑性有限要素解析は弾性有限要素解析と非常に似通っており，かなりの部分が共通に取り扱えることを示した．応力 - ひずみ関係が異なること，主要変数が速度となること，および剛性方程式が非線形方程式となることなどが弾性有限要素解析と異なる部分であるが，それぞれの式の形としては両者で同じとなっている．従って剛塑性有限要素解析を理解する上で，弾性有限要素解析を理解することは有用であることがわかる．

参考文献

- 1)小坂田宏造，連載講座「塑性変形の有限要素法」，機械の研究 第35巻 1号(1983)，p56 (第1回)～第36巻 5号(1984)，p647 (第17回)．
- 2)日本材料学会編，続・初心者のための有限要素法，(1982)．
- 3) S. Kobayasi et al.，Metal Forming and the Finite-Element Method, Oxford University Press, (1989)．
- 4) 塑性加工学会編：非線形有限要素法、(1994)、コロナ社．
- 5) O.C.Zienkiewicz：The Finite Element Method, (1977), McGraw-Hill.
- 6) N.Kikuchi：Finite Element Methods in Mechanics, (1985),Cambridge Univ. Press.

演習

- (1) 平面応力問題に対する[D]マトリックスの式を導出せよ。また $g=0$ とおくとどうなるか計算せよ。
- (2) 式(3.2.32)の平面ひずみ問題に対する[D]マトリックスを計算するExcelの表を完成させよ。ただし，[Dd] と [Dv] を別の表にすること。
- (3) 平面応力問題に対する[D]マトリックスを計算するExcelの表を完成させよ。
- (4) 四角形一次要素に対する [B] マトリックスを求めるExcelの表を完成させよ。また節点座標，節点速度，要素内の座標を入力してひずみ速度の値を求め，表を検証せよ。
- (5) 上記 (2) で作成した表と (4) で作成した[B]マトリックスを求める表を組み合わせ，要素内の点における応力を求めよ。
- (6) 剛塑性FEM解析プログラム`rp-fem-a.for`と次のサンプルデータを用いて，端面固着の平面ひずみ圧縮の計算せよ。またMicroAVSを用いてメッシュの変形、相当ひずみ分布を図示せよ。