



# 剛塑性有限要素法

名古屋大学工学研究科 湯川伸樹

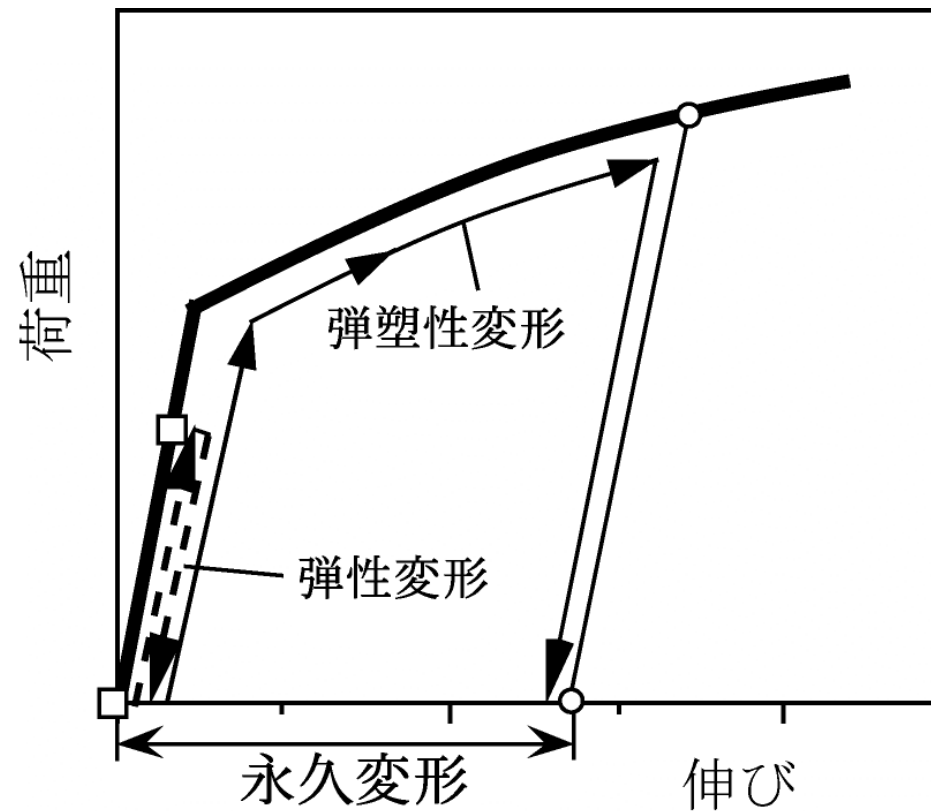
yukawa@numse.nagoya-u.ac.jp

## 3. 剛塑性有限要素法

- 3. 1 はじめに
  - 3. 2 剛塑性体の構成式
  - 3. 3 節点速度－ひずみ速度関係（ $[B]$  マトリックス）
  - 3. 4 仮想仕事の原理（剛性（ $[K]$ ）マトリックス）
  - 3. 5 非線形方程式の解法
  - 3. 6 非圧縮性の拘束と数値積分
  - 3. 7 エネルギー汎関数による定式化
  - 3. 8 終わりに
- 参考文献

# 荷重と伸びの関係

一般の金属材料 荷重が小さいとき： 弾性変形  
荷重がある程度以上大きい時： 弾塑性変形

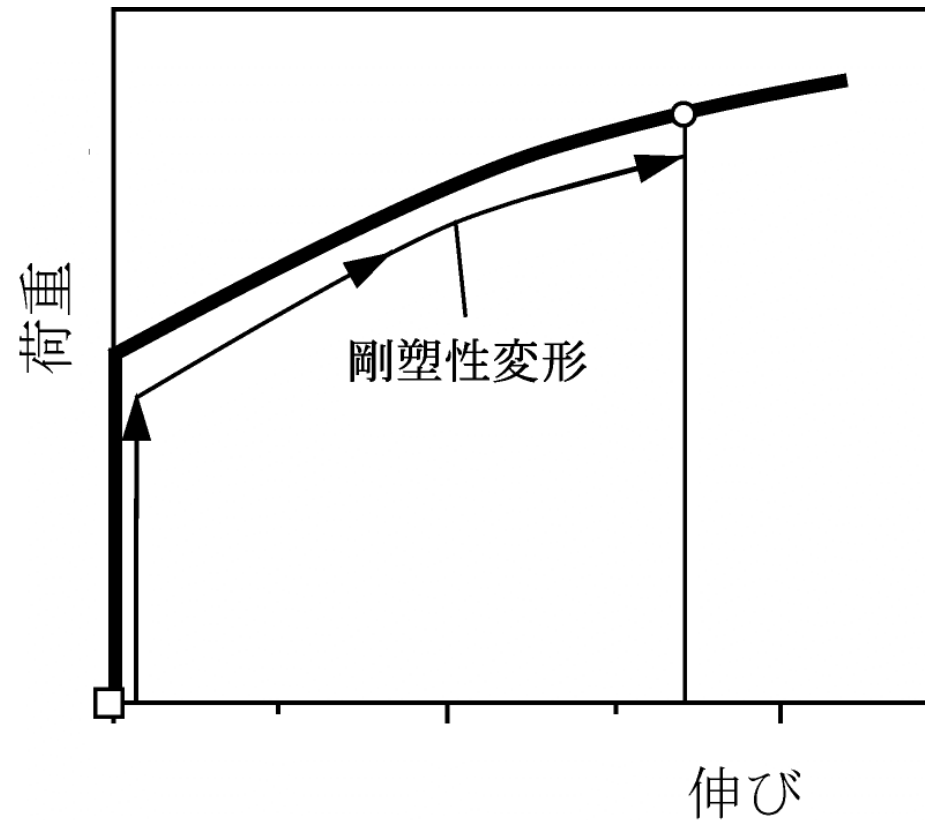


(a) 弾性変形と弾塑性変形

# 荷重と伸びの関係

- ・ 材料の受ける塑性変形が弾性変形に比べて極めて大きく
- ・ 加工中の除荷もほとんどない場合

→ 剛塑性変形解析でも十分な精度



例えば  
鍛造  
型圧延など

(b) 剛塑性変形

## 剛塑性FEMコード

例えば鍛造解析に特化したコードでは、剛塑性解析を用いているものが多い。

### 剛塑性有限要素法を用いた鍛造解析用コード

- **DEFORM-2D, -3D (Altan, Ohio State Univ. (SFTC))**
- **FORGE 2/3 (Chenot, CEMEF)**
- **VirtualForging (コマツ産機(株))**
- **QForm (Quantor Ltd.)**
- **RIPLS-FORGE (小坂田, 大阪大学)**
- **FS-ASO (齊木, 熊本大学)**
- **RIPAD2D, 3D (湯川, 名古屋大学)**
- :

## 有限要素法の歴史

年	人物	
1956	Turner	航空機の構造解析（弾性） 変位法, 三角形要素
1960	Percy	弾塑性有限要素法
1965	Argyris	弾塑性有限要素法 初期ひずみ法
1966	Pope	剛性変化法 (リブ付きパネルの応力計算)
1967	Marcal & King	剛性変化法 (切欠き付き板の引張り)
1967	Hayes & Marcal	剛塑性有限要素法 上界法の最適化
1967	Zienkewicz	「マトリックス有限要素法」出版
1968	鷺津	変分原理の解説
1970	Hibbitt	大変形弾塑性有限要素法
1973	Lee & Kobayashi	剛塑性FEM (ラグランジュ未定定数法)
1974	Zienkewicz	剛塑性FEM (ペナルティ法)
1979	森, 小坂田	剛塑性FEM (圧縮特性法)

## 連続体の有限要素解析において用いられる理論

- 第1群：連続体の運動を記述するための基礎方程式  
(応力の釣合い式)
- 第2群：連続体の変形を記述するための基礎方程式  
(ひずみの定義式など)
- 第3群：連続体の変形と応力の関係を記述する式  
(弾性体に対するフックの法則や、剛塑性体に対するLevy-Misesの法則などの構成方程式)

+

有限要素法による離散化解析技術

# 連続体の有限要素解析において用いられる理論

第 1 群：連続体の運動を記述するための基礎方程式（平面ひずみ問題）

弾性体	剛塑性体
<p>釣合方程式</p> $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0$ $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0$	<p>釣合方程式</p> $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0$ $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0$
<p>仮想仕事の原理</p> $\int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dv$ $- \int_{S_t} (T_x \delta u + T_y \delta v) dS = 0$	<p>仮想仕事の原理（速度形）</p> $\int_V (\sigma_x \delta \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \delta \dot{\varepsilon}_y + \tau_{xy} \delta \dot{\gamma}_{xy}) dv$ $- \int_{S_t} (T_x \delta \dot{u} + T_y \delta \dot{v}) dS = 0$



## 連続体の有限要素解析において用いられる理論

第2群：連続体の変形を記述するための基礎方程式（平面ひずみ問題）

弾性体	剛塑性体
<p>ひずみの定義</p> $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$	<p>ひずみ速度の定義</p> $\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}$ $\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y}$

# 連続体の有限要素解析において用いられる理論

## 第3群：応力とひずみの関係式（平面ひずみ問題）

弾性体	剛塑性体
<p>応力—ひずみ関係式 (Hookeの法則)</p> $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$ $[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix}$ <p>材料特性値 E（例えば鋼：21,000kgf/mm<sup>2</sup>） 体積変化に関する特性値 <math>\nu</math>（例えば鋼：0.3）</p>	<p>応力—ひずみ速度関係式 (Levy-Misesの流動則)</p> $\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}$ $[D] = \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\varepsilon}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ <p>材料特性に関する実験式 <math>\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}, T)</math> 体積一定条件 <math>\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = 0</math> (<math>\nu = 0.5</math>に相当)</p>

# 連続体の有限要素解析において用いられる理論

## 有限要素法による離散化解析技術

	弾性体	剛塑性体
1. 主要変数	節点変位	節点速度
2. 要素の内挿関数	共通	
3. 要素番号と節点番号の対応関係	共通	
4. 要素剛性方程式の重ね合わせによる全体剛性方程式の組み立て	共通	
5. 節点力に関する釣合い条件の導入	共通	
6. 境界条件の導入	節点変位および 節点外力	節点速度および 節点外力
7. 剛性方程式の性質および解法	線形 一回の計算	非線形 反復計算

\* 体積一定条件による拘束条件と全体の自由度の関係で、剛塑性解析には使用不可能な要素がある。

## 降伏条件式

一般の金属材料では、応力がある一定の条件になったときに塑性変形が始まると考えられ、この条件のことを降伏条件と呼ぶ。

### Misesの降伏条件式

降伏条件としてよく用いられるものにMisesの降伏条件がある。これは偏差応力テンソルの不変量 $J_2$ が限界値に達したときに降伏が起きるとし、次式で表される。

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\} \\ &= \sigma_Y^2\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

## 降伏条件式

図に示すと，下図のように主応力空間で円筒で表される．この曲面は，その面上の全ての点が降伏に対して等しいポテンシャルにあると見做すことができる．そこで，このような  $f(s)=\text{constant}$  で定義される降伏曲面の関数を，「塑性ポテンシャル」と呼ぶことがある．

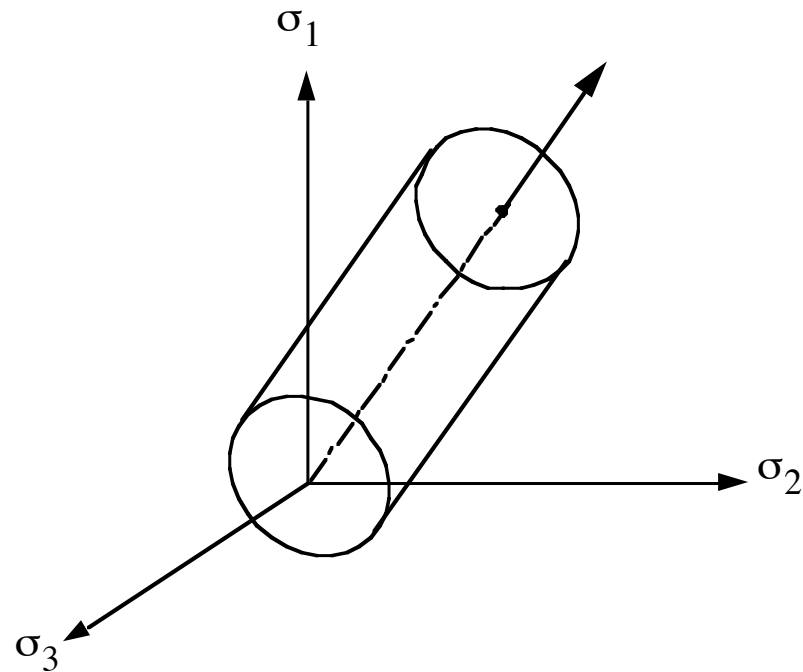


図3.2.1 Misesの降伏曲面

## 降伏条件式

$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x - \sigma_m \\ \sigma'_y = \sigma_y - \sigma_m \\ \sigma'_z = \sigma_z - \sigma_m \end{cases}$$

偏差応力

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

静水圧応力成分

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ ((\sigma'_x + \sigma_m) - (\sigma'_y + \sigma_m))^2 + ((\sigma'_y + \sigma_m) - (\sigma'_z + \sigma_m))^2 \right. \\ &\quad \left. + ((\sigma'_z + \sigma_m) - (\sigma'_x + \sigma_m))^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} \end{aligned}$$

静水圧応力はMisesの降伏条件に無関係

# 降伏条件式

## 圧縮性材料特性法

一般の金属材料の変形を考える場合、材料の体積は塑性変形に関して一定と考えられるが、その体積一定の拘束条件をゆるめて材料にわずかな体積変化を許すことによって降伏条件に静水圧応力依存性を導入し、偏差応力成分のみならず静水圧応力も直接求める方法。次式のような降伏条件式を用いる。

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} + \underline{g \cdot \sigma_m^2} \\ &= \sigma_Y^2\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

$g$ は材料の静水圧応力依存性を示す補正係数

# 降伏条件式

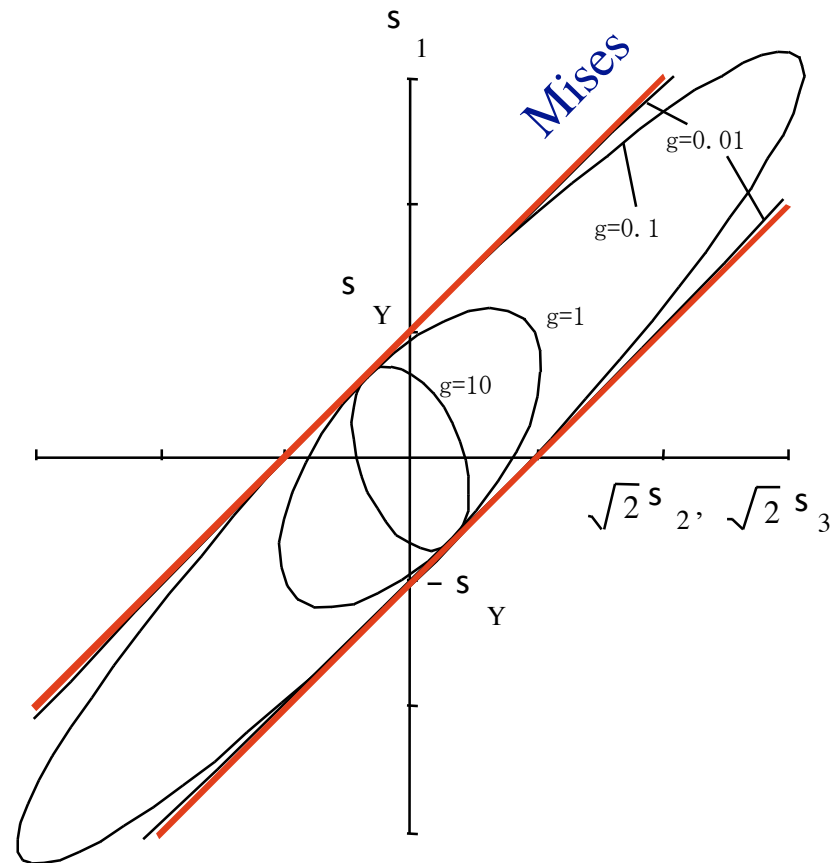


図3.2.2 圧縮性材料の降伏曲面



# 構成方程式

弾性体 → ひずみと応力は線形関係で 1 対 1 に対応.

塑性体 → 応力-ひずみは非線形関係.

塑性ひずみは負荷経路によって変わってくるため、  
応力とひずみが 1 対 1 に対応しない.



各時点での微小時間におけるひずみ増分, または  $\Delta t \rightarrow 0$  として, その時点でのひずみ速度で考える.

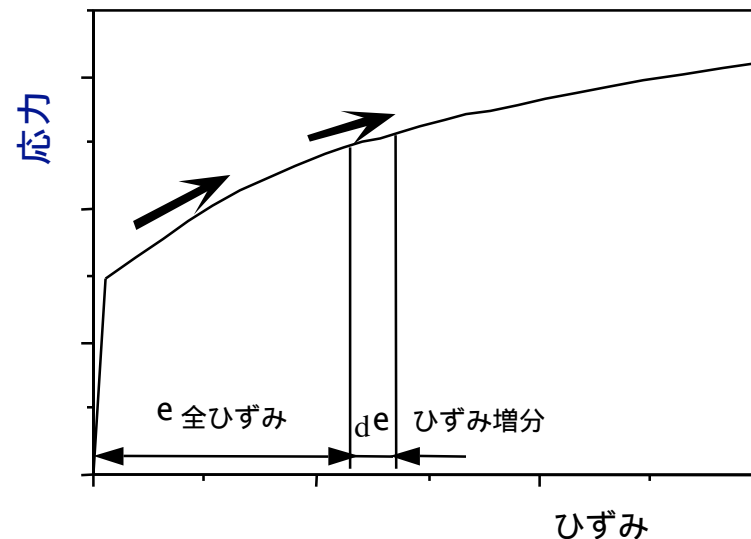


図3.2.3 全ひずみとひずみ増分

# 構成方程式

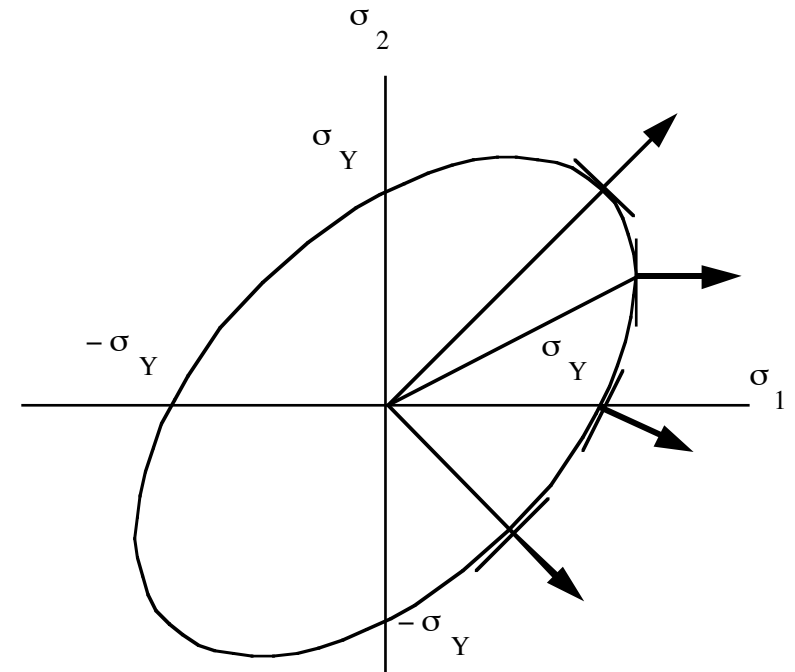
ひずみ速度ベクトルの方向は塑性ひずみ速度ベクトルの方向は限界ポテンシャル面  $f$  (降伏局面) の法線方向を向くと仮定する。(垂直則)

降伏面上の応力状態  $(s_1, s_2, s_3)$  において,  $f$  の外向き法線ベクトルの成分比は,

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial f}{\partial \sigma_3}$$

各ひずみ速度成分は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \\ \dot{\varepsilon}_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \\ \dot{\varepsilon}_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_{xy} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \\ \dot{\gamma}_{yz} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \\ \dot{\gamma}_{zx} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$



等塑性ポテンシャル面  $f$

図3.2.4 降伏曲面とひずみ増分ベクトルの方向

## 構成方程式

f として式(3.2.1)で表される  $\bar{\sigma}$  の  $1/2$  を用いると,

$$f = \frac{1}{4} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\}$$

Levy-Misesの式

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \dot{\lambda} \left( \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right) \\ \dot{\varepsilon}_y = \dot{\lambda} \left( -\frac{1}{2} \sigma_x + \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right) \\ \dot{\varepsilon}_z = \dot{\lambda} \left( -\frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y + \sigma_z \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = 3\dot{\lambda} \tau_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 3\dot{\lambda} \tau_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = 3\dot{\lambda} \tau_{zx} \end{cases}$$

(3.2.4)

## 構成方程式

塑性変形によって単位時間に単位体積あたり消費されるエネルギー（塑性仕事率）を  $\dot{w}$  とすると

$$\dot{w} = \{\sigma\}^T \{\dot{\epsilon}\} \quad (3.2.5)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \quad (3.2.6)$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}\} \quad (3.2.7)$$

なので、この式に式 (3.2.4) を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \lambda \left[ \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right\} + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \\ &= \lambda \cdot \bar{\sigma}^2 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

# 構成方程式

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \dot{\lambda} \left[ \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right\} + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \\ &= \dot{\lambda} \cdot \bar{\sigma}^2\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

$\dot{\varepsilon}$  を相当ひずみ速度と定義すると、塑性仕事率は

$$\dot{w} = \bar{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon}$$

従って

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}$$

(3.2.9, 3.2.10)

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left( \sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_z \right) \\ \dot{\varepsilon}_y = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left( \sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_x \right) \\ \dot{\varepsilon}_z = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left( \sigma_z - \frac{1}{2}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = 3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = 3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{zx} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

# 構成方程式

剛塑性

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.2.12)$$

弾性

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 0 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.2.14)$$

## 構成方程式

- (1) 弾性 : 応力とひずみの関係  
剛塑性 : 応力と塑性ひずみ速度の関係
- (2) 弾性 : ヤング率  $E$  は材料定数  
剛塑性 :  $\lambda$  は応力やひずみ状態に依存するスカラー量
- (3) 弾性 : ポアソン比  $\nu$  は材料定数  
剛塑性 :  $\nu = 1/2$  (体積一定)

## 構成方程式

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.2.12)$$

$\dot{\varepsilon}$  は式 (3.2.11) を変形して式 (3.2.1) に代入して,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2}{9} \left\{ (\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2) \right\} \quad (3.2.13)$$

式 (3.2.12) のマトリックスは特異のため、逆の関係は直接は求まらない。



# 構成方程式

## 静水圧応力

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

## 偏差応力成分

$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x - \sigma_m \\ \sigma'_y = \sigma_y - \sigma_m \\ \sigma'_z = \sigma_z - \sigma_m \end{cases} \quad \begin{cases} \tau'_{xy} = \tau_{xy} \\ \tau'_{yz} = \tau_{yz} \\ \tau'_{zx} = \tau_{zx} \end{cases}$$

(3.2.16)

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left( \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right) \\ &= \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left( \frac{3}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right) \\ &= \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left( \frac{3}{2} \sigma_x - \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right) \right) \\ &= \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left( \frac{3}{2} \sigma_x - \frac{3}{2} \sigma_m \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_x \end{aligned}$$

(3.2.17)

## 構成方程式

他の成分も同様に求めると

マトリックス表示すると

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_x \\ \dot{\varepsilon}_y = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_y \\ \dot{\varepsilon}_z = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_z \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = 3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau'_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau'_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = 3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau'_{zx} \end{cases} \quad (3.2.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.2.19)$$

# 構成方程式

逆の関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\varepsilon}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.2.20)$$

$$\{\sigma'\} = [D'']\{\dot{\varepsilon}\}$$

## 構成方程式

### ■ 圧縮性材料特性法の場合

$$f = \frac{\bar{\sigma}^2}{2}$$
$$= \frac{1}{4} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} + \frac{g}{2} \sigma_m^2$$

この場合でも垂直則（式(3.2.3)）が成り立つとすると、

$$\varepsilon_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}$$
$$= \lambda \left( \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right)$$
$$= \lambda \left\{ \left( 1 + \frac{g}{9} \right) \sigma_x + \left( -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} \right) \sigma_y + \left( -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} \right) \sigma_z \right\}$$

## 構成方程式

### ■ 圧縮性材料特性法の場合

他の成分も同様に計算すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_x = \dot{\lambda} \left( \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right) \\ \dot{\varepsilon}_y = \dot{\lambda} \left( -\frac{1}{2} \sigma_x + \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right) \\ \dot{\varepsilon}_z = \dot{\lambda} \left( -\frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y + \sigma_z + \frac{g}{3} \sigma_m \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_{xy} = 3\dot{\lambda} \tau_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 3\dot{\lambda} \tau_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = 3\dot{\lambda} \tau_{zx} \end{array} \right.$$

(3. 2. 21)

# 構成方程式

Misesの降伏条件の場合と同様に $\lambda$ を求めると

$$\lambda = \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 1 + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 1 + \frac{g}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.2.24)$$

このマトリックスは $g \neq 0$ の時、逆マトリックスが存在する。

# 構成方程式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{\epsilon}}} \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.2.25)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\dot{\epsilon}\}$$

## 構成方程式

相当ひずみ速度は、

$$\dot{\varepsilon}^2 = \frac{2}{9} \left\{ (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y)^2 + (\dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right\} + \frac{1}{g} \dot{\varepsilon}_v^2 \quad (3.2.26)$$

ここで $\dot{\varepsilon}_v$ は体積ひずみ速度であり、

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z \quad (3.2.27)$$

式 (3.2.23) より

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \cdot g \cdot \sigma_m \quad (3.2.28)$$



# 構成方程式

## ■ 平面ひずみ問題

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_z = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0 \\ \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix}$$

# 構成方程式

## ■ 平面ひずみ問題

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \left( -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} \right) (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) \\ &= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \left( -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} \right) \cdot \dot{\varepsilon}_v \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

# 構成方程式

## ■ 平面ひずみ問題

偏差ひずみに関する項と体積ひずみに関する項を分離して書くと

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \left( \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \\
 &= ([D_D] + [D_V]) \{\dot{\epsilon}\} \quad (3.2.32)
 \end{aligned}$$

# 構成方程式

## ■ 平面応力問題

演習：平面応力問題に対する [D] マトリックスの式を導出せよ。  
また  $g=0$  とおくとどうなるか計算せよ。

$$\begin{cases} \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 1 + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 1 + \frac{g}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

# 構成方程式

## ■ 平面応力問題

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{g}{9} & -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{g}{9} & 1 + \frac{g}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \frac{1}{\left(\frac{3}{4} + \frac{g}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 + \frac{g}{9} & \frac{1}{2} - \frac{g}{9} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{g}{9} & 1 + \frac{g}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} + \frac{g}{9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}$$

$g=0$ としても特異にならない。

# 構成方程式

## ■ 平面応力問題

$g=0$ とすると(Misesの降伏条件を用いると)、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_z &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} (\sigma_x + \sigma_y) \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \cdot \sigma_m \\ &= -(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) \end{aligned}$$

## 節点速度-ひずみ速度関係

剛塑性解析ではひずみ速度を用いて応力が計算される。



節点の**変位速度**が変形を記述する基礎変数になる。

x, y, z 方向の変位速度を  $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$  とすると、ひずみ速度は次式で表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \\ \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \\ \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

## 節点速度-ひずみ速度関係

要素内部の速度場は、 $n_1$  個の形状関数  $N_i$  と節点における速度を用いて、次のように表される。

$$\begin{cases} \dot{u} = \sum_{i=1}^{n_1} N_i \cdot \dot{u}_i^e \\ \dot{v} = \sum_{i=1}^{n_1} N_i \cdot \dot{v}_i^e \\ \dot{w} = \sum_{i=1}^{n_1} N_i \cdot \dot{w}_i^e \end{cases} \quad (3.3.2)$$

式 (3.3.1) に代入すると、

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \dot{u}_i^e \\ \dot{\varepsilon}_y = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \dot{v}_i^e \\ \dot{\varepsilon}_z = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \dot{w}_i^e \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = \sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \dot{u}_i^e + \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \dot{v}_i^e \right) \\ \dot{\gamma}_{yz} = \sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \dot{v}_i^e + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \dot{w}_i^e \right) \\ \dot{\gamma}_{zx} = \sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \dot{w}_i^e + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \dot{u}_i^e \right) \end{cases} \quad (3.3.3)$$



## 節点速度-ひずみ速度関係

マトリックス表示すると、

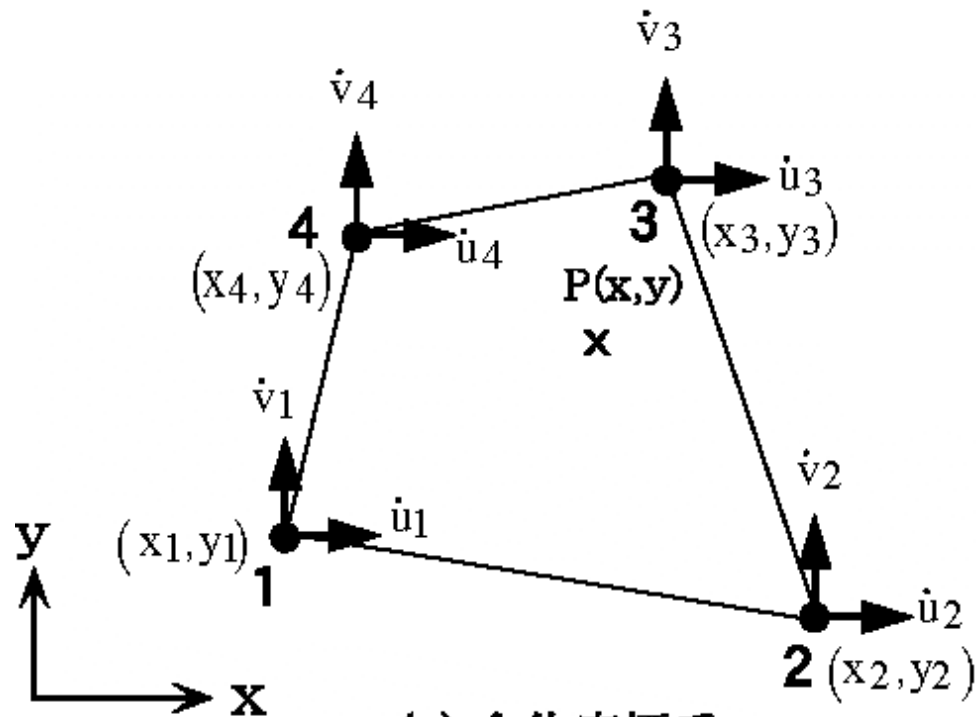
$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & B_2 & 0 & 0 & & & & B_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & C_2 & 0 & & & & 0 & C_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 & D_2 & & & & 0 & 0 & D_{n_1} \\ C_1 & B_1 & 0 & C_2 & B_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & C_{n_1} & B_{n_1} & 0 \\ 0 & D_1 & C_1 & 0 & D_2 & C_2 & & & & 0 & D_{n_1} & C_{n_1} \\ D_1 & 0 & B_1 & D_2 & 0 & B_2 & & & & D_{n_1} & 0 & B_{n_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^e \\ \dot{v}_1^e \\ \dot{w}_1^e \\ \dot{u}_2^e \\ \dot{v}_2^e \\ \dot{w}_2^e \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{u}_n^e \\ \dot{v}_n^e \\ \dot{w}_n^e \end{Bmatrix} \quad (3.3.4)$$

ただし

$$B_i = \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad C_i = \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad D_i = \frac{\partial N_i}{\partial z} \quad (3.3.5)$$

# 節点速度-ひずみ速度関係

## 四角形要素



(a) 全体座標系

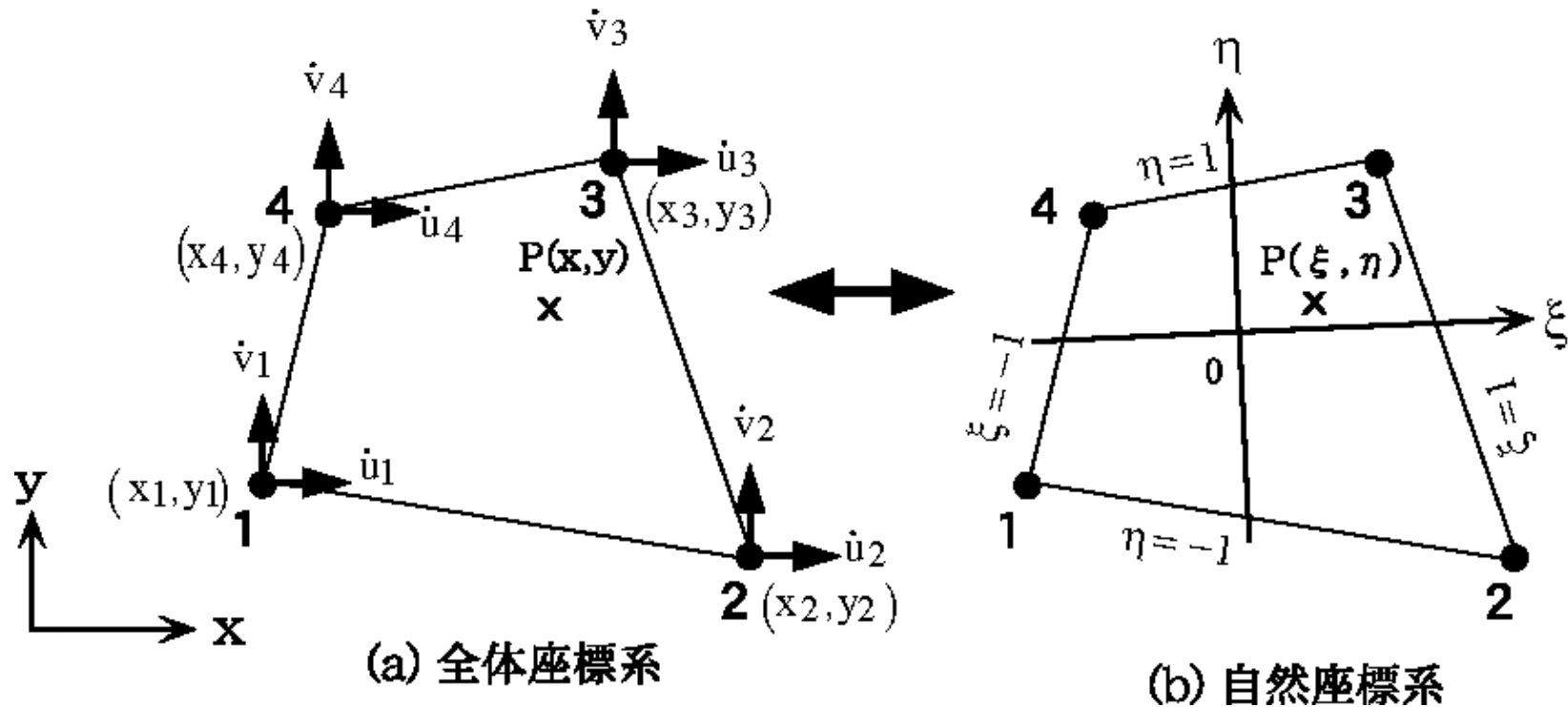
$$u = a + bx + cy + dxy$$

$$v = e + fx + gy + hxy$$

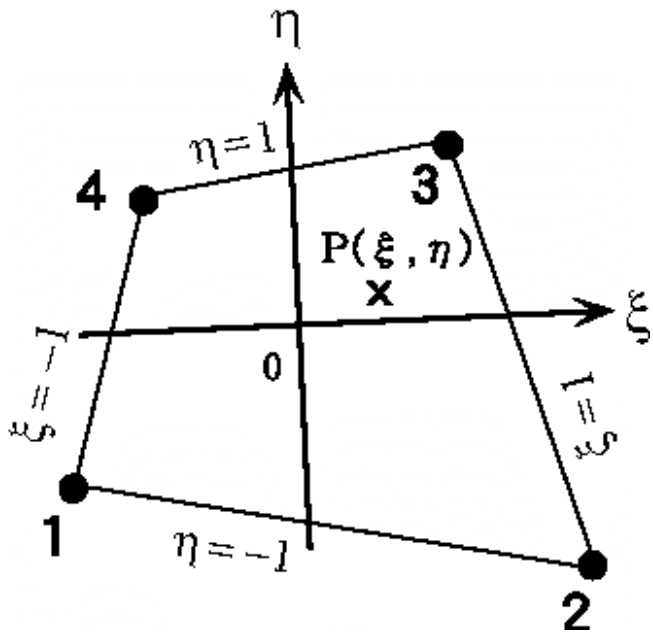
$$\begin{cases} u_1 = a + bx_1 + cy_1 + dx_1y_1 \\ u_2 = a + bx_2 + cy_2 + dx_2y_2 \\ u_3 = a + bx_3 + cy_3 + dx_3y_3 \\ u_4 = a + bx_4 + cy_4 + dx_1y_4 \end{cases}$$

# 節点速度-ひずみ速度関係

## 四角形要素



# 節点速度-ひずみ速度関係



$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot y_i \end{cases}$$

(3.3.5)

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot u_i \\ v = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot v_i \end{cases}$$

(3.3.6)

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \cdot \xi) (1 + \eta_i \cdot \eta) \quad (3.3.7)$$

$$\begin{pmatrix} N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \end{pmatrix}$$

## 節点速度-ひずみ速度関係

ひずみ速度は、
$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \quad (3.3.9)$$

マトリックス表示すると、

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} \quad (3.3.10)$$

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot u_i \\ v = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot v_i \end{cases}$$

式(3.3.6)を代入すると、

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_4 \\ \dot{v}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.3.11)$$

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [B] \{\dot{u}^e\} \quad (3.3.12)$$

## 節点変位-ひずみ速度関係

$N_i$  は自然座標系で表されている。→ 微分変換が必要

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (3.3.13)$$

マトリックスで表すと、

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.3.14)$$

## 節点変位-ひずみ速度関係

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.3.14)$$

逆の関係を求めると、

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.3.15)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

ヤコビアン

## 節点変位-ひずみ速度関係

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{12} & 0 & B_{13} & 0 & B_{14} & 0 \\ 0 & B_{21} & 0 & B_{22} & 0 & B_{23} & 0 & B_{24} \\ B_{21} & B_{11} & B_{22} & B_{12} & B_{23} & B_{13} & B_{24} & B_{14} \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

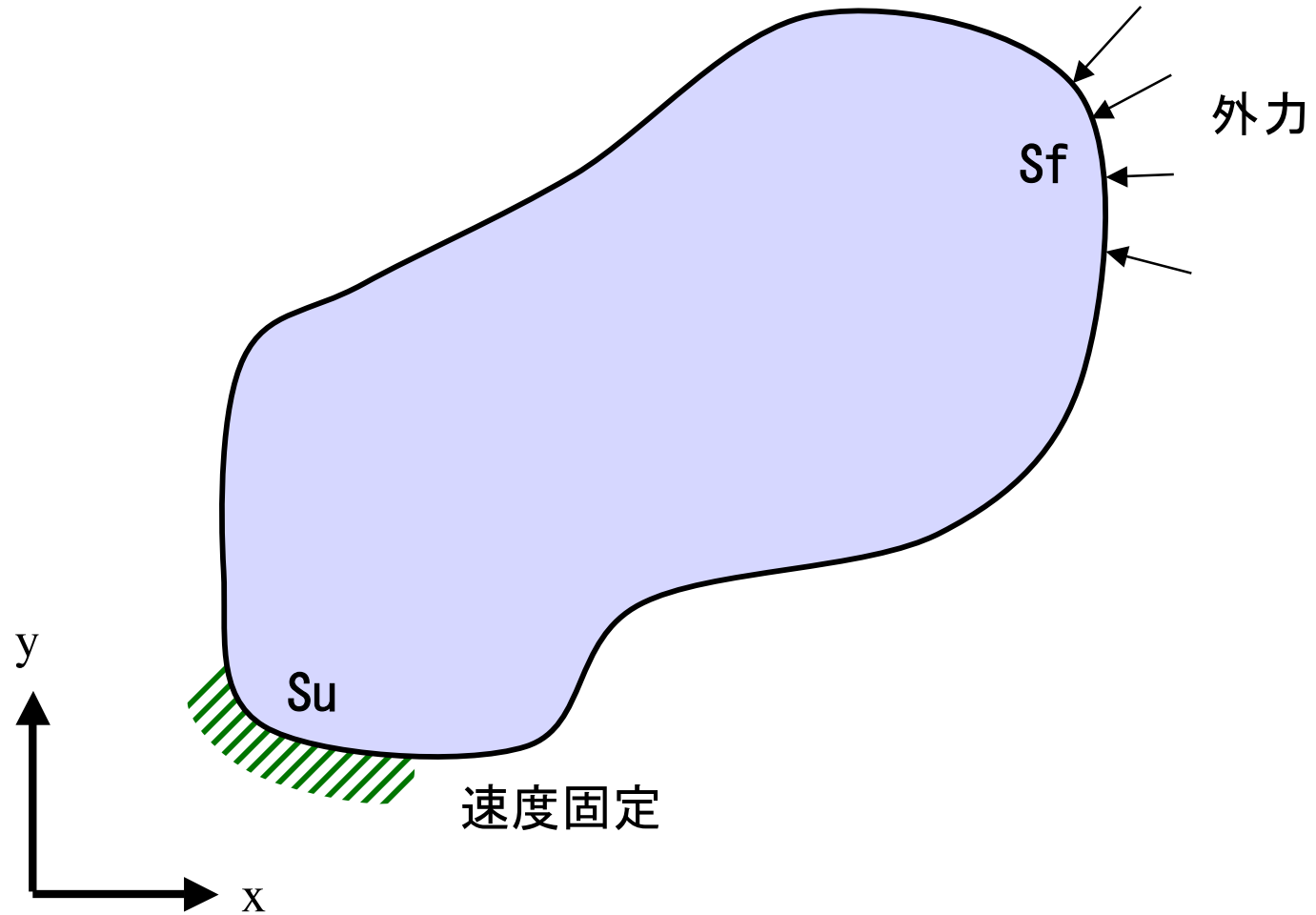
$$\begin{cases} B_{1i} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \\ B_{2i} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 + \eta_i \cdot \eta) \cdot \xi, \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \cdot \xi) \cdot \eta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot x_i, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot y_i, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot y_i \end{aligned}$$



# 剛塑性FEM



# 剛塑性FEM

## ■ 基礎方程式

### 1. 力の釣合い

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{b}_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \bar{b}_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{b}_z = 0 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

### 3. 応力－ひずみ速度関係 (圧縮性材料特性法の場合)

15の方程式  
15の未知数

### 2. ひずみ速度－速度関係

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \\ \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \\ \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \end{cases} \quad (3.4.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.4.3)$$

# 剛塑性FEM

これらの連立方程式を以下の境界条件のもとで解く.

## (1) 力学的境界条件

外力  $\{T_0\}$  を受けている表面 $S_f$ 上で

$$\{T\} = \{T_0\} \quad (3.4.4)$$

## (2) 幾何学的境界条件

速度が固定されている表面 $S_u$ 上で

$$\{\dot{u}\} = \{\dot{u}_0\} \quad (3.4.5)$$

# 剛塑性FEM

## ■ 仮想仕事率の原理

釣合い状態にある材料に任意の仮想変位速度  $\{\delta\dot{u}\}$  を与える。

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\delta\dot{\varepsilon}\} dV = \int_{S_f} \{T_0\}^T \{\delta\dot{u}\} dS + \int_V \{\bar{b}\}^T \{\delta\dot{u}\} dV \quad (3.4.6)$$

速度の内挿式

$$\{\dot{u}\} = [N] \{\dot{u}^e\}$$

ひずみ速度—節点速度関係

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [B] \{\dot{u}^e\}$$

$$\{\delta\dot{\varepsilon}\} = [B] \{\delta\dot{u}^e\}$$

応力—ひずみ速度関係

$$\{\sigma\} = [D] \{\dot{\varepsilon}\}$$

を代入すると、

要素剛性方程式は

$$\{\delta\dot{u}^e\} \int_V [B]^T [D] [B] dV \{\dot{u}^e\} = \{\delta\dot{u}^e\} \left( \int_{S_f} [N]^T \{T_0\} dS + \int_V [N]^T \{\bar{b}\} dV \right)$$

(3.4.6)

# 剛塑性FEM

## ■ 仮想仕事率の原理

$$\left\{ \delta \dot{u}^e \right\} \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \left\{ \dot{u}^e \right\} = \left\{ \delta \dot{u}^e \right\} \left( \int_{S_f} [\mathbf{N}]^T \{T_0\} dS + \int_V [\mathbf{N}]^T \{\bar{b}\} dV \right)$$

任意の  $\left\{ \delta \dot{u}^e \right\}$  に対してこの式が成り立つので,

$$\begin{aligned} \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \left\{ \dot{u}^e \right\} &= \int_{S_f} [\mathbf{N}]^T \{T_0\} dS + \int_V [\mathbf{N}]^T \{\bar{b}\} dV \\ &= \left\{ F^e \right\} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

$$\left[ \mathbf{K}^e \right] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad \text{とおくと,}$$

$$\left[ \mathbf{K}^e \right] \left\{ \dot{u}^e \right\} = \left\{ F^e \right\} \quad (3.4.8)$$

# 剛塑性FEM

## ■ 全体剛性方程式

要素剛性方程式を全要素について計算し、重ね合わせる。

$$[K]\{\dot{U}\} = \{F\} \quad (3.4.9)$$

重ね合わせの方法は弾性の場合と同じ。

ただし,[D]が速度の関数なので、非線形方程式



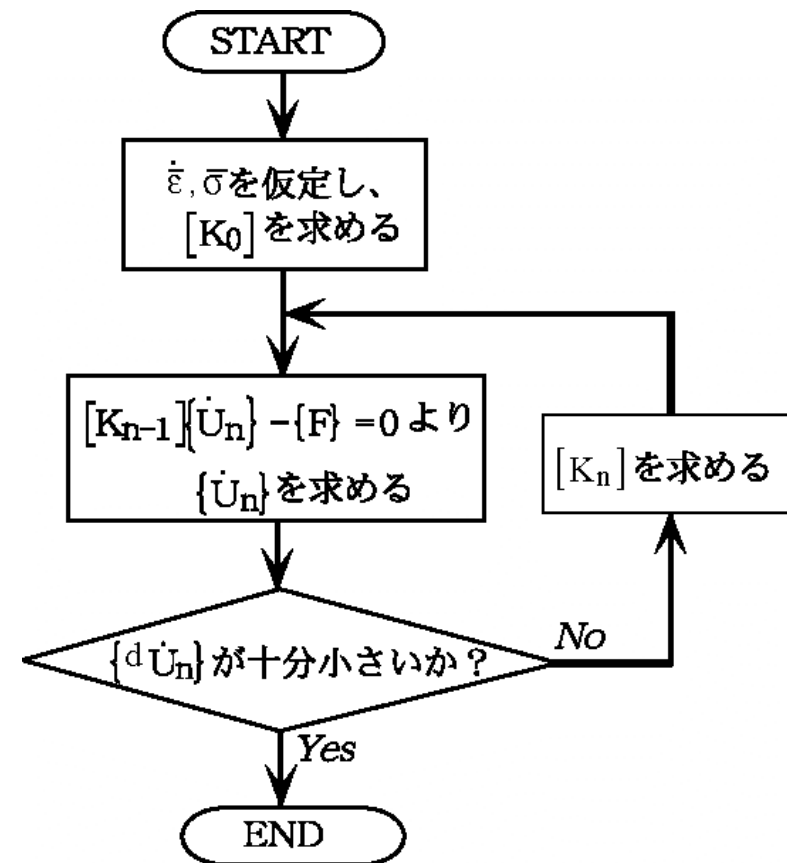
1回の計算では解けず,反復計算が必要

# 剛塑性FEM

## ■ 非線形方程式の解法

### □ 直接代入法

- ・アルゴリズムが簡単
- ・ $[K_0]$ をどうやって求めるか
- ・正解に近くなると収束が遅くなる



# 剛塑性FEM

## ■ 非線形方程式の解法

### □ Newton-Raphson法

一般的な方程式

$$f(x) = 0$$

近似解を $x_n$ とする.→

$$f(x_n) \neq 0$$

$$f(x) = f(x_n) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_n} dx + O(dx^2)$$

$$= 0$$

$$dx = - \frac{f(x_n)}{\left( \frac{df}{dx} \right) \Big|_{x=x_n}} \quad (3.5.5)$$

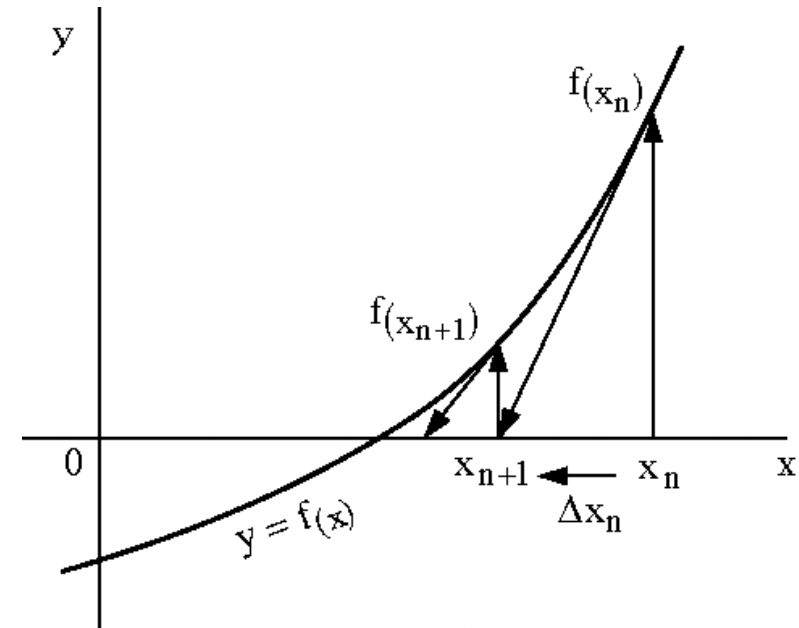


図3.5.2 Newton法

$$x_{n+1} = x_n + dx \quad (3.5.6)$$



# 剛塑性FEM

## ■ 非線形方程式の解法

### □ Newton-Raphson法

多変数問題  $\{\varphi(\{\dot{U}\})\} = [K(\{\dot{U}\})]\{\dot{U}\} - \{F\} = 0$  (3.5.7) を

近似解  $\{\dot{U}_n\}$  の周りで展開すると

$$\{\varphi(\{\dot{U}\})\} = \{\varphi(\{\dot{U}_n\})\} + [K_T(\{\dot{U}\})]\{d\dot{U}_n\} = 0 \quad (3.5.8)$$

$[K_T]$  は接線剛性マトリックスであり、その成分は

$$K_{Tij} = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \dot{u}_j} \right)_{\dot{U}=\dot{U}_n} = \left( K_{ij} + \sum_k \left( \frac{\partial K_{ik}}{\partial \dot{u}_j} \dot{u}_k \right) - \frac{\partial F_i}{\partial \dot{u}_j} \right)_{\dot{U}=\dot{U}_n} \quad (3.5.9)$$

# 剛塑性FEM

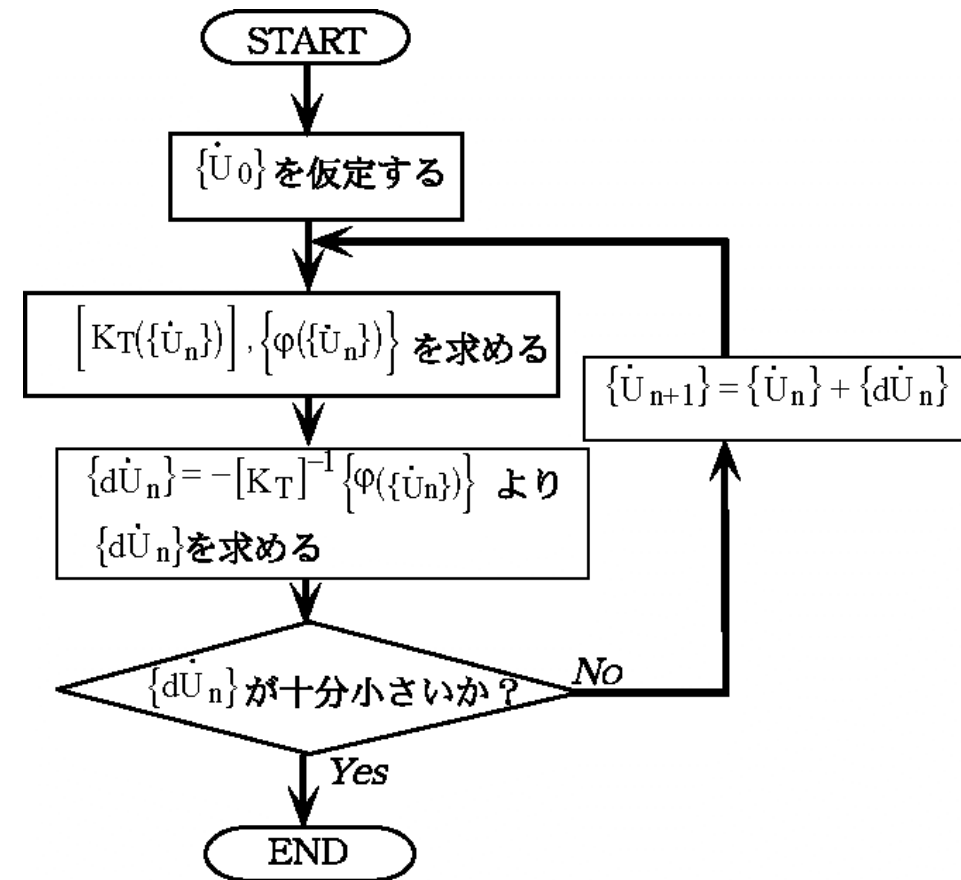
## ■ 非線形方程式の解法

### □ Newton-Raphson法

・ 初期値が正解に近いときは、少ない反復回数で収束する

・ 反面、初期値が良くないと発散する

・ 直接法に比べアルゴリズムが複雑



## 非圧縮性の拘束と数値積分

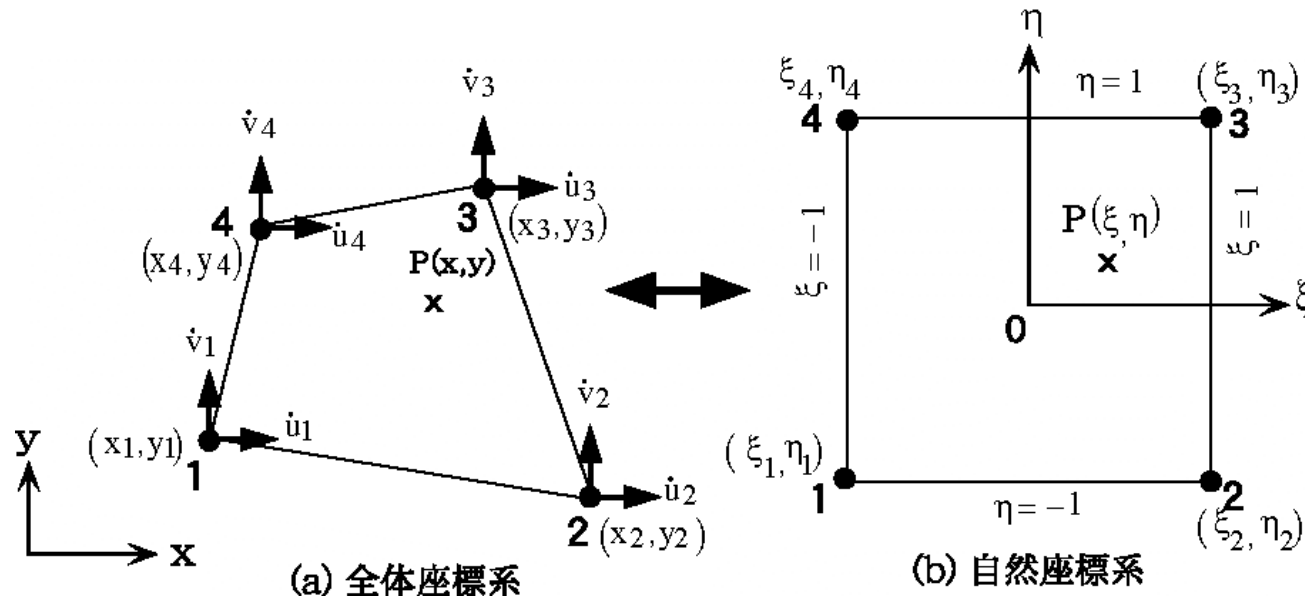
$$\int_V [B]^T [D][B] dV \{ \dot{u}^e \} = \{ F^e \}$$

三角形要素 → 要素内で[B], [D]が一定なので、  
積分は極めて簡単

$$[K^e] = [B]^T [D][B] \cdot A^e$$

四角形要素 → 要素内で[B], [D]が一定でない。  
数値積分を用いる。

# 非圧縮性の拘束と数値積分



Gaussの積分公式

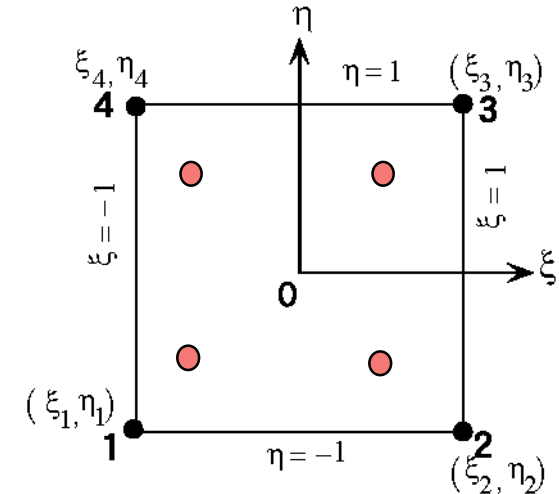
$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{m_1} w_i f(\xi_i) \quad (3.6.1)$$

2次元の場合

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{i=1}^{m_1} w_j w_i f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.6.2)$$

# 非圧縮性の拘束と数値積分

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{i=1}^{m_1} w_j w_i f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.6.2)$$



	積分点の座標 $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$	重み係数 $(w_i, w_j, w_k)$
1点	0	2
2点	$\pm 0.577350269189626$ $(\pm 1/\sqrt{3})$	1
3点	0 $\pm 0.774596669241438$ $(\pm \sqrt{3/5})$	$0.888888888888888 (8/9)$ $0.555555555555555 (5/9)$

# 非圧縮性の拘束と数値積分

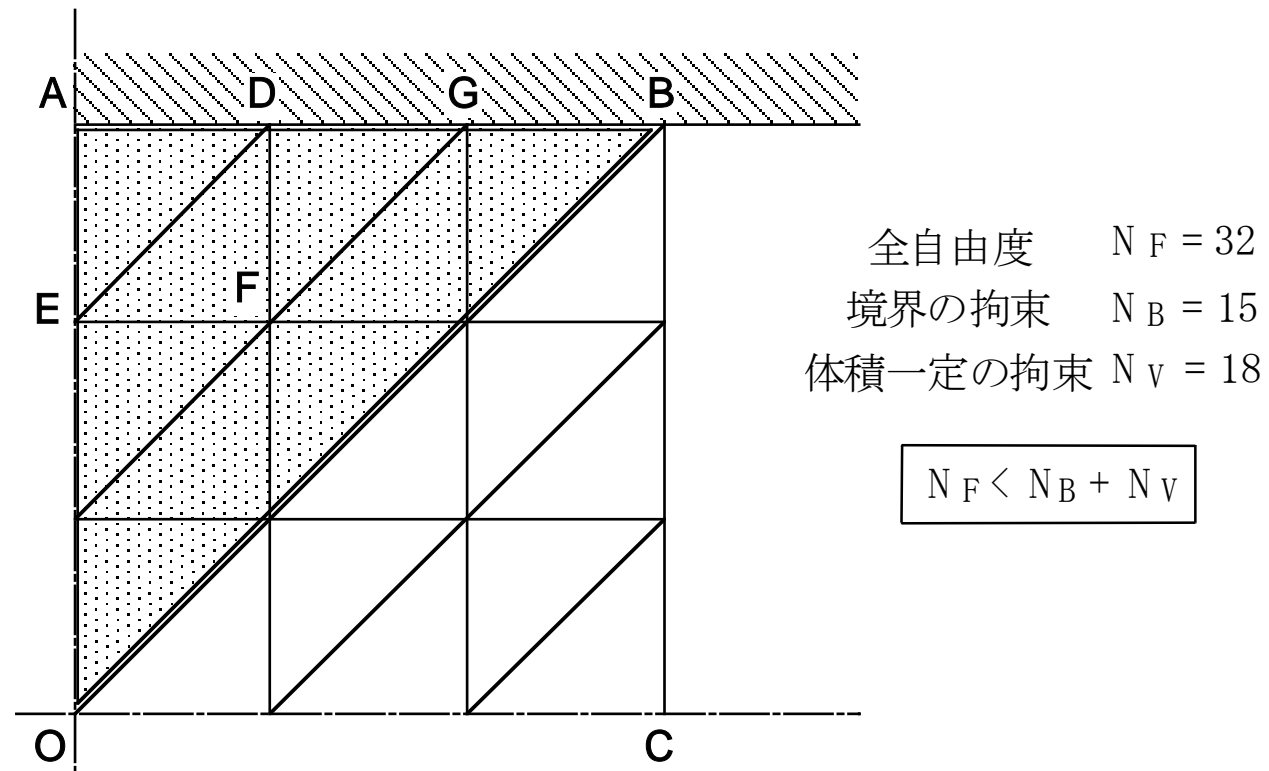
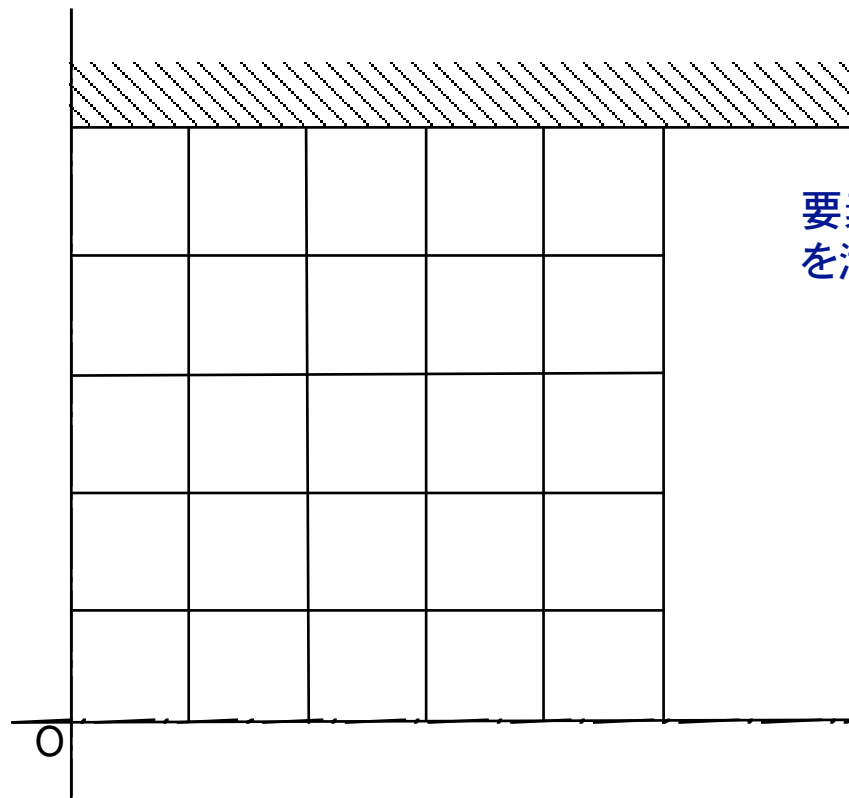


図3.6.1 剛塑性解析に三角形1次要素を用いた場合

# 非圧縮性の拘束と数値積分



$$\dot{\varepsilon}_v = A + Bx + Cy$$

要素内のあらゆる点で体積一定条件  
を満足させるためには

$$A \equiv 0, B \equiv 0, C \equiv 0$$

完全積分の場合

全自由度  $N_F = 72$

境界の拘束  $N_B = 23$

体積一定の拘束  $N_V = 75$

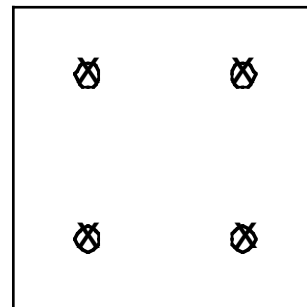
$$N_F < N_B + N_V$$

図3.6.2 四角形 1 次要素を用いた場合

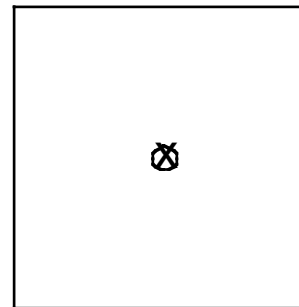
# 非圧縮性の拘束と数値積分

○ 偏差ひずみに関する積分点

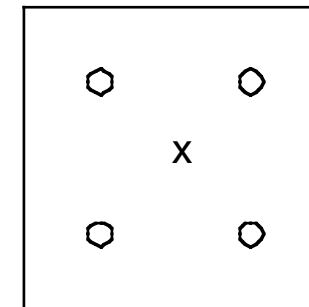
x 体積ひずみに関する積分点



(a) 2x2 積分  
(完全積分, FI)



(b) 1 点積分  
(低減積分, RI  
安定化低減積分, RIS)

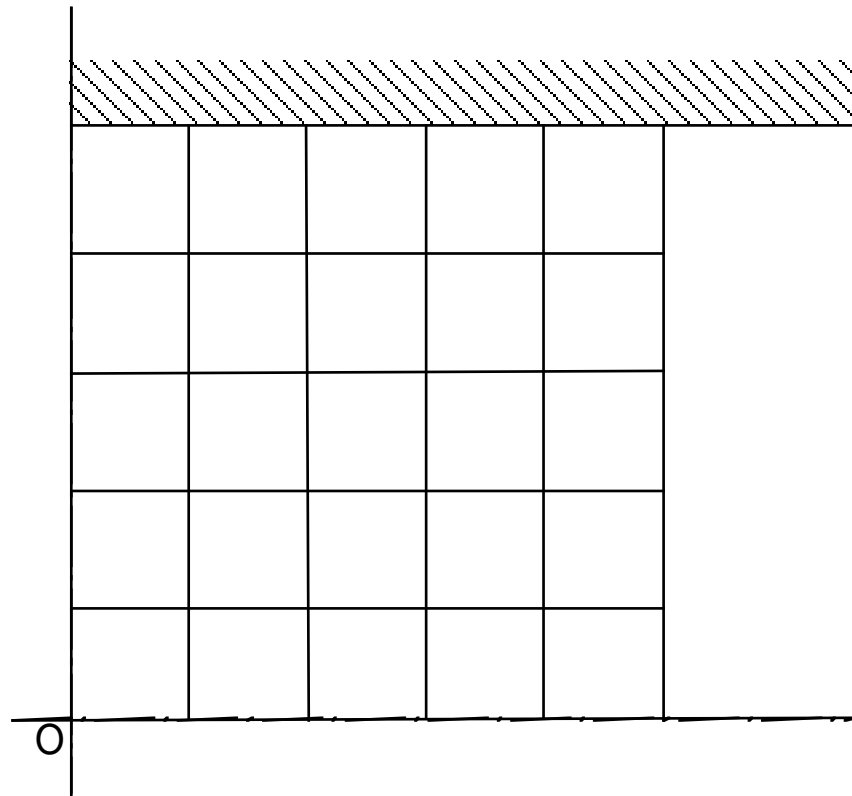


(c) 4 点 + 1 点積分  
(選択低減積分, SRI)

図3.6.3 四角形要素の数値積分



# 非圧縮性の拘束と数値積分



$$\dot{\varepsilon}_V = A$$

選択低減積分の場合

全自由度  $N_F = 72$

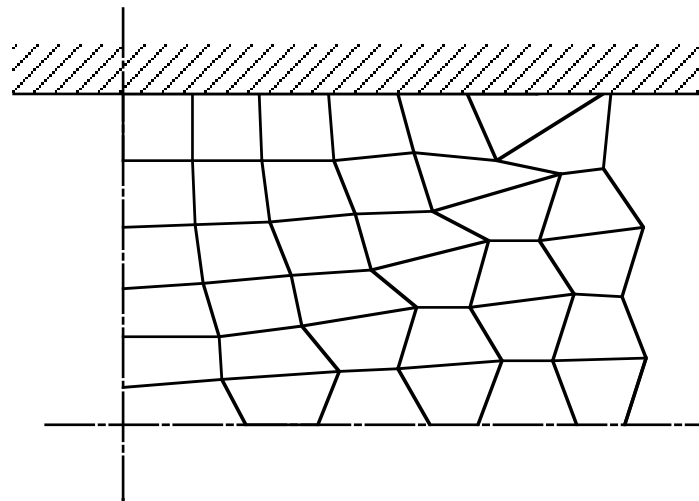
境界の拘束  $N_B = 23$

体積一定の拘束  $N_V = 25$

$$N_F > N_B + N_V$$

図3.6.2 四角形 1 次要素を用いた場合

# 非圧縮性の拘束と数値積分



(a) 低減積分

図3.6.4 平面ひずみ圧縮の計算例

# 非圧縮性の拘束と数値積分

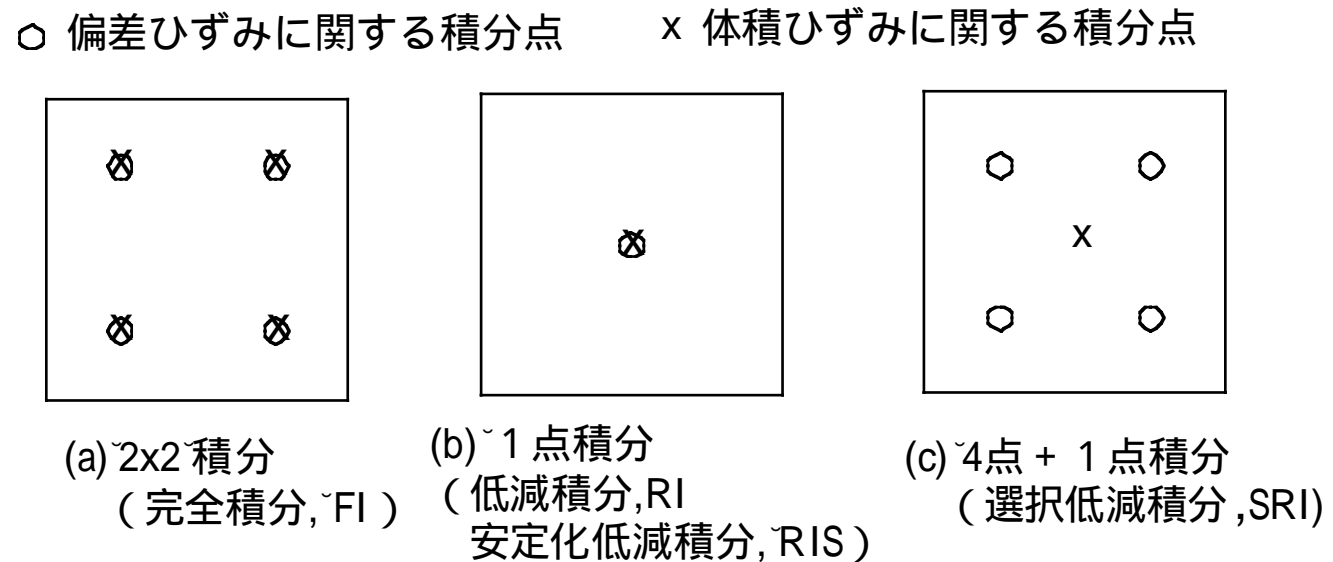


図3.6.3 四角形要素の数値積分

# 非圧縮性の拘束と数値積分

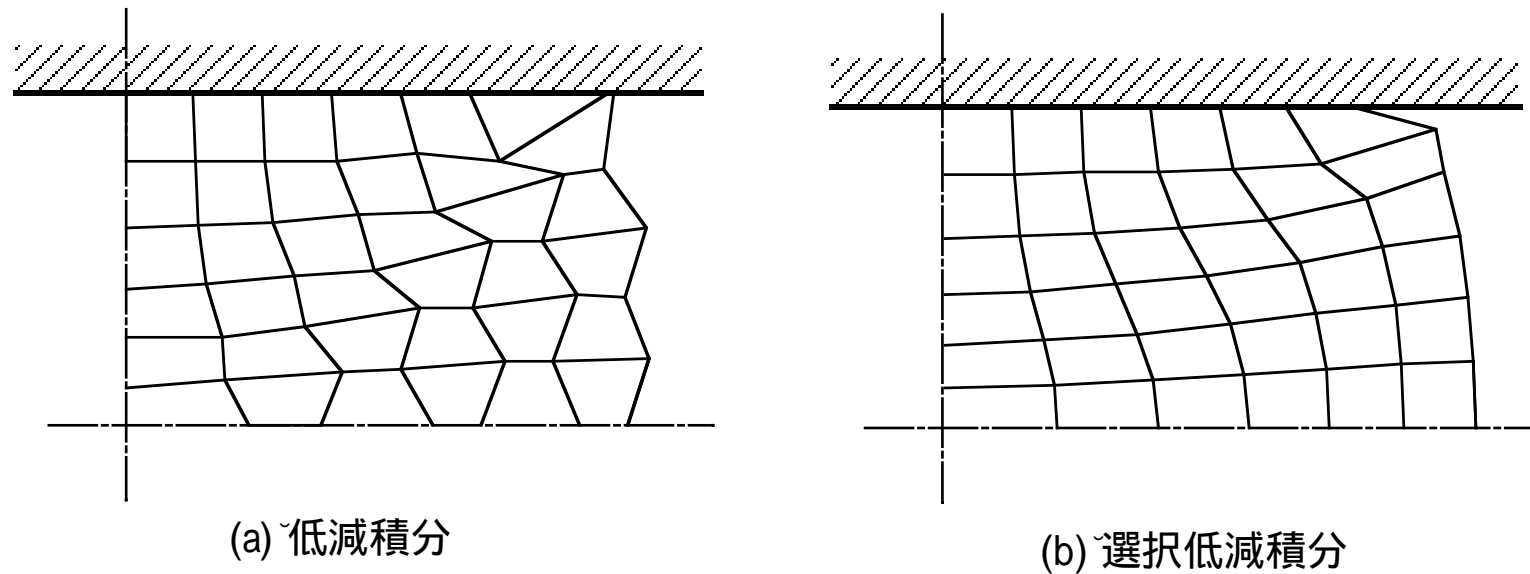


図3.6.4 平面ひずみ圧縮の計算例

# エネルギー汎関数による定式化

## ■ 最小ポテンシャルエネルギーの原理

動的可容速度場：

速度の境界条件と体積一定条件を満足する任意の速度場

Markovの変分原理

汎関数

$$\Phi(\dot{u}) = \int_V \left( \int_0^{\dot{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\dot{\varepsilon} \right) dV - \int_{S_f} \{F\}^T \{\dot{u}\} dS \quad (3.7.1)$$

速度場が正解の時，上記汎関数が最小となる。

## エネルギー汎関数による定式化

速度場に体積一定条件を最初から仮定しているため、複雑な変形の場合速度場の決定が難しい。



体積一定の条件を外部拘束条件として付け加えることにより、速度場の条件からはずす。

### ◆ ラグランジュ乗数法

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{u}) &= \int_V \left( \int_0^{\dot{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\dot{\varepsilon} \right) dV - \int_{S_f} \{F\}^T \{\dot{u}\} dS + \int_V \lambda \cdot \dot{\varepsilon}_v dV \\ &= \Phi_D + \Phi_F + \Phi_V\end{aligned}$$

### ◆ ペナルティ法

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{u}) &= \int_V \left( \int_0^{\dot{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\dot{\varepsilon} \right) dV - \int_{S_f} \{F\}^T \{\dot{u}\} dS + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \int_V (\dot{\varepsilon}_v)^2 dV \\ &= \Phi_D + \Phi_F + \Phi_P\end{aligned}$$

### ◆ 圧縮性材料特性法

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{u}) &= \int_V \left( \int_0^{\dot{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\dot{\varepsilon} \right) dV - \int_{S_f} \{F\}^T \{\dot{u}\} dS \\ &= \Phi_D + \Phi_F\end{aligned}$$

# エネルギー汎関数による定式化

## ■ 圧縮性材料特性法

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right\} + g \cdot \sigma_m^2 \\ &= \sigma_Y^2\end{aligned}\quad (3.7.2)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}^2 &= \frac{2}{9} \left\{ (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z + \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right\} + \frac{1}{g} \varepsilon_v^2 \\ &\end{aligned}\quad (3.7.4)$$

汎関数

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{u}) &= \int_V \left( \int_0^{\dot{\varepsilon}} \tilde{\sigma} d\dot{\varepsilon} \right) dV - \int_{S_f} \{F\}^T \{\dot{u}\} dS \\ &= \Phi_D + \Phi_F\end{aligned}\quad (3.7.3)$$

汎関数を最小化する速度場は、次の連立方程式を解くことによって求まる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\dot{u})}{\partial u_k} = 0 & (k=1 \sim n, n \text{ は全自由度数}) \\ \end{cases} \quad (3.7.5)$$

# エネルギー汎関数による定式化

## ■ 圧縮性材料特性法

$$\dot{\varepsilon}^2 = \frac{2}{9} \left\{ (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y)^2 + (\dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right\} + \frac{1}{g} \dot{\varepsilon}_v^2$$

$$\dot{\varepsilon}^2 = \{\dot{\varepsilon}\}^T [D'] \{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{u}^e\}^T [B]^T [D'] [B] \{\dot{u}^e\} \quad (3.7.7)$$

マトリックスで表示すると

$$\{D'\} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} & \frac{4}{9} + \frac{1}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (3.7.8)$$



# エネルギー汎関数による定式化

## ■ 圧縮性材料特性法

$$\Phi = \sum \Phi^e$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Phi_D^e}{\partial \dot{u}_k^e} \right\} &= \int_V \left( \frac{\partial \int_0^{\dot{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\dot{\varepsilon}}{\partial \dot{u}_k^e} \right) dV \\ &= \int_V \left( \frac{\partial \int_0^{\dot{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\dot{\varepsilon}}{\partial \dot{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{u}_k^e} \right) dV && (3.7.9) \\ &= \int_V \left( \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} [B]^T [D'] [B] \{ \dot{u}^e \} \right) dV \\ &= \int_V \left( [B]^T [D] [B] \right) dV \{ \dot{u}^e \} \\ &= [K^e] \{ \dot{u}^e \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{u}_k^e} &= \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \dot{\varepsilon}^2} \cdot \frac{\partial \dot{\varepsilon}^2}{\partial \dot{u}_k^e} \\ &= \frac{1}{2\dot{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \dot{\varepsilon}^2}{\partial \dot{u}_k^e} \\ &= \frac{1}{2\dot{\varepsilon}} \cdot 2[B]^T [D'] [B] \{ \dot{u}^e \} \\ &= \frac{1}{\dot{\varepsilon}} \cdot [B]^T [D'] [B] \{ \dot{u}^e \} \end{aligned}$$

# エネルギー汎関数による定式化

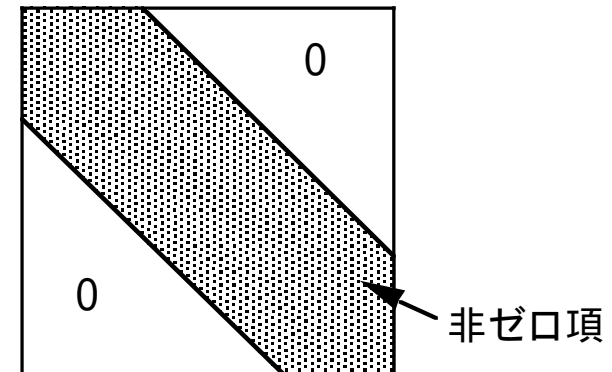
## ■ 圧縮性材料特性法

$$\begin{aligned}\Phi_F^e &= -\int_{S_{fe}} \{\dot{u}\}^T \{F\} dS \\ &= -\{\dot{u}^e\}^T \int_{S_{fe}} [N]^T [N] dS \{F'\}\end{aligned}\quad (3.7.10)$$

ここで改めて  $\{F^e\} = \int_{S_{fe}} [N]^T [N] dS \{F'\}$  とおくと

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_F^e}{\partial \dot{u}_k} \right\} = -\{F^e\}$$

従って  $[K^e] \{\dot{u}^e\} = \{F^e\}$



(a) ~弾性解析  
~圧縮性材料特性法

# エネルギー汎関数による定式化

## ■ 圧縮性材料特性法

応力は

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D]\{\dot{\varepsilon}\} \\ &= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} [D'''] \{\dot{u}^e\} + \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \left( -\frac{2}{9} + \frac{1}{g} \right) [C] \{\dot{u}^e\} \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

$$[D'''] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7.16)$$

(3.2.20参照)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7.15)$$

(3.2.24参照)

# 剛塑性FEM

## ■ Lagrange乗数法

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{u}) &= \int_V \left( \int_0^{\dot{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\dot{\varepsilon} \right) dV - \int_{S_f} \{T_0\}^T \{\dot{u}\} dS + \int_V \lambda \cdot \dot{\varepsilon}_v dV \\ &= \Phi_D + \Phi_F + \Phi_V\end{aligned}\quad (3.7.17)$$

$\dot{\varepsilon}_v$ : 体積ひずみ速度

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}_k} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_\ell} = 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} k=1 \sim n, \quad n \text{ は全自由度数,} \\ \ell=1 \sim m, \quad m \text{ は } \lambda \text{ の全数 } \end{array} \right) \quad (3.7.18)$$

# 剛塑性FEM

## ■ Lagrange乗数法

Misesの降伏条件を用いると,

$$\dot{\varepsilon} = \{\dot{u}\}^T [D'''] \{\dot{u}\} = \{\dot{u}^e\}^T [B]^T [D'''] [B] \{\dot{u}^e\} \quad (3.7.19)$$

なので, 内部仕事に関する項は

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Phi_D^e}{\partial \dot{u}_k} \right\} &= \int_V [B]^T [D'''] [B] dV \{\dot{u}^e\} \\ &= [K^e] \{\dot{u}^e\} \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

$$[D''] = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} [D'''] \quad (3.7.21)$$

また

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_D^e}{\partial \lambda_\ell} \right\} = 0 \quad (3.7.23)$$

# 剛塑性FEM

## ■ Lagrange乗数法

外力による項は、圧縮性材料特性法の場合と同様

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Phi_F^e}{\partial \dot{u}_k} \end{array} \right\} = - \left\{ F^e \right\} \quad (3.7.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Phi_F^e}{\partial \lambda_\ell} \end{array} \right\} = 0 \quad (3.7.25)$$

# 剛塑性FEM

## ■ Lagrange乗数法

体積一定の拘束条件による項については， $\lambda$ に対する形状関数およびそれに対応した[B]マトリックスを  $[N_\lambda], [B_\lambda]$  とすると，

$$\begin{aligned}\Phi_V &= \int_{V_e} \lambda \cdot \dot{\epsilon}_v dV \\ &= \int_{V_e} \left\{ \lambda^e \right\}^T [N_\lambda]^T \{P\}^T [B_\lambda] \left\{ u^e \right\} dV\end{aligned}\quad (3.7.26)$$

$$\{P\} = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

なので

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_V^e}{\partial \dot{u}_k} \right\} = \int_{V_e} [B_\lambda]^T \{P\} [N_\lambda] dV \left\{ \lambda^e \right\} = [K_{\lambda^e}] \left\{ \lambda^e \right\} \quad (3.7.28)$$

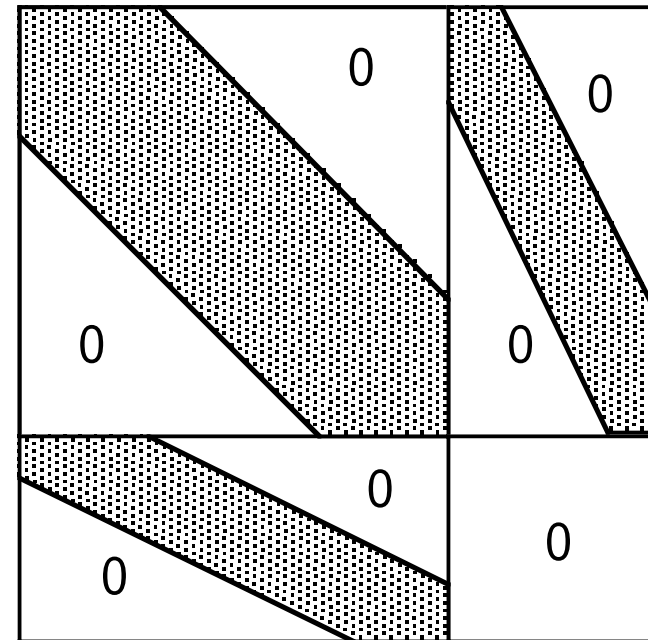
$$\left\{ \frac{\partial \Phi_V^e}{\partial \lambda_\ell} \right\} = \int_{V_e} [N_\lambda]^T \{P\}^T [B_\lambda] dV \left\{ \lambda^e \right\} = [K_{\lambda^e}]^T \left\{ \lambda^e \right\} \quad (3.7.29)$$

# 剛塑性FEM

## ■ Lagrange乗数法

以上をまとめると,

$$\left[ \begin{array}{c|c} K_{\dot{u}}^e & K_{\lambda}^e \\ \hline K_{\lambda}^{eT} & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \dot{u}^e \\ \lambda^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7.30)$$



(b) Lagrange乗数法



# 剛塑性FEM

## ■ Lagrange乗数法

速度場が正解の時， $\lambda$  は静水圧応力と等しくなることが知られている．従って応力は

$$\sigma_m = \lambda \quad (3.7.31)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} + \sigma_m \{P\}$$

$$= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} [D'''] \{\dot{\varepsilon}\} + \sigma_m \{P\} \quad (3.7.32)$$

# 剛塑性FEM

## ■ ペナルティ法

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{u}) &= \int_V \left( \int_0^{\dot{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\dot{\varepsilon} \right) dV - \int_{S_f} \{T_0\}^T \{\dot{u}\} dS + \lambda \int_V (\dot{\varepsilon}_v)^2 dV \\ &= \Phi_D + \Phi_F + \Phi_P\end{aligned}\quad (3.7.33)$$

第1項, 第2項に関してはLagrange乗数法と同じ。  
ペナルティ項に関しては,

$$\dot{\varepsilon}_v = \{P\}[B]\{\dot{u}^e\} \quad (3.7.34)$$

なので,

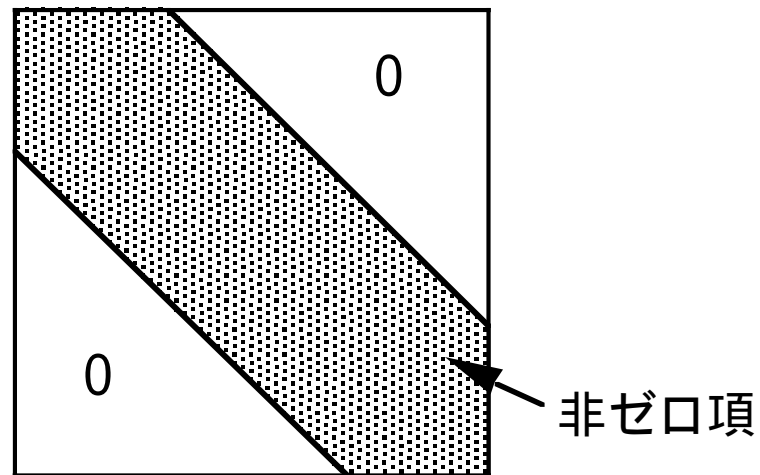
$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial \Phi_P}{\partial \dot{u}_k} \right\} &= \bar{\lambda} \int_V [B]^T \{P\}^T \{P\}[B] dV \{\dot{u}^e\} \\ &= \bar{\lambda} [K_P^e] \{\dot{u}^e\}\end{aligned}\quad (3.7.35)$$

# 剛塑性FEM

## ■ ペナルティ法

要素剛性方程式は

$$\left( [K^e] + \bar{\lambda} [K_P^e] \right) \{ \dot{u}^e \} = \{ F^e \} \quad (3.7.36)$$



(a) ペナルティ法

# 剛塑性FEM

## ■ ペナルティ法

応力は

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma'\} + \bar{\lambda}\{P\}\dot{\varepsilon}_v \\ &= \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}}[D''']\{\dot{\varepsilon}\} + \bar{\lambda}[C]\{\dot{\varepsilon}\} \end{aligned} \quad (3.7.37)$$

$$[D'''] \quad (3.7.16)$$

$$[C] \quad (3.7.15)$$

圧縮性材料特性法の場合は

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D]\{\dot{\varepsilon}\} \\ &= \frac{\tilde{\sigma}}{\dot{\varepsilon}}[D''']\{\dot{\varepsilon}\} + \frac{\tilde{\sigma}}{\dot{\varepsilon}}\left(-\frac{2}{9} + \frac{1}{g}\right)[C]\{\dot{\varepsilon}\} \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

なので、圧縮性材料特性法は一種のペナルティ法と見ることができる。

## 参考文献

- 小坂田宏造：連載講座“塑性変形の有限要素法”、機械の研究、35-1(1983)～36-5(1984).
- 日本材料学会編：続・初心者のための有限要素法、(1982).
- S. Kobayashi et al.: Metal Forming and the Finite Element Method, (1989), Oxford Univ. Press.
- 塑性加工学会編：非線形有限要素法、(1994)、コロナ社.
- O.C.Zienkiewicz: The Finite Element Method, (1977), McGraw-Hill.
- N.Kikuchi: Finite Element Methods in Mechanics, (1985), Cambridge Univ. Press.